

第一章 数学的起源和早期发展

数学与其他科学分支一样,是在一定的社会条件下,通过人类的社会实践和生产活动发展起来的一种智力积累。其主要内容反映了现实世界的数量关系和空间形式,以及它们之间的关系和结构。这可以从数学的起源得到印证。

古代非洲的尼罗河、西亚的底格里斯河和幼发拉底河、中南亚的印度河和恒河以及东亚的黄河和长江,是数学的发源地。这些地区的先民由于从事农业生产的需要,从控制洪水和灌溉,测量田地的面积、计算仓库的容积、推算适合农业生产的历法以及相关的财富计算、产品交换等等长期实践活动中积累了丰富的经验,并逐渐形成了相应的技术知识和有关的数学知识。

第一节 古埃及、古巴比伦的数学










一、古埃及的数学


古代埃及人凭借尼罗河沿河两岸的沃土,用他们的智慧独立地创造出了灿烂的古代文化。远在公元前 4000 年以前的古埃及的文明,已经有了象形文字,大约于公元前 3000 年左右,埃及成为统一的奴隶制国家。根据现在保存在英国牛津 Ashmolean 博物馆的古埃及第一王朝时期(约公元前 3400 年以前)一个王室的权标上象形文字的记载,当时一次胜仗曾俘获过 120000 名俘虏,400000 头牛,1422000 头羊。这表明当时

埃及人已能用象形文字表示大的数目。

1. 古埃及人的记数法

古埃及人是用以 10 为基的象形数字记数的。

		 或 			
1	10	100	1000	10000	100000
					
		1000000	10000000		

介于其间的各数由这些符号的组合来表示,书写方式是从右往左。所以  表示为 32。

尽管埃及是最早采用 10 进数制的国家之一,由于没有采用位置记数的方法,这样就给记数带来了麻烦(详见第三节)。

古埃及人用纸草作为书写材料,纸草是尼罗河三角洲沼泽地盛产的一种水生植物,把这种草的茎依纵向剖成小薄片,然后压平晒干使之成为纸卷,可用于书写。由于埃及地区气候干燥,因此有些纸草能幸运地保存至今。其中有两卷纸草记录了古埃及数学资料。它们都产生于公元前 1700 年左右。一卷称为莫斯科纸草(图 1-1),其中含有 25 个数学问题,由俄国人戈兰尼采夫(Голенищев)于 1893 年在埃及发现,现存于莫斯科美术博物馆。另一卷称为兰德纸草(图 1-2)由英国人兰德(A. Henry. Rhind)于 1858 年在埃及购买的,后收藏于英国博物馆。因纸草是由埃及人阿默士(Ahmes)从公元前 3000 年的文献中抄写下来,记录着 85 个数学问题的抄本,所以又称

为阿默士纸草。这两卷纸草是现在我们研究古埃及数学的主要来源。

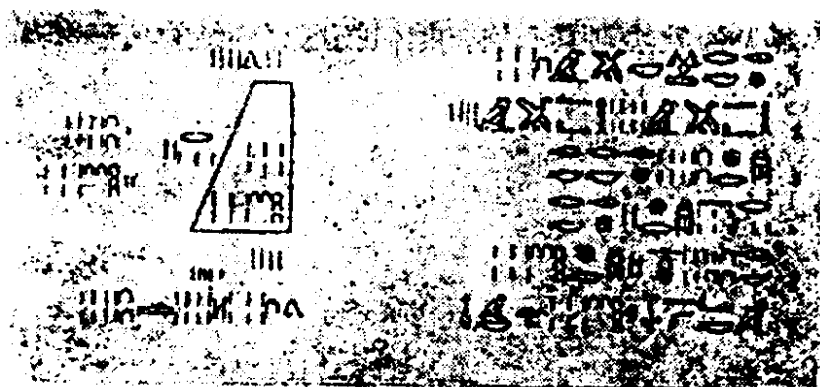


图 1-1 莫斯科纸草上的两列象形文字

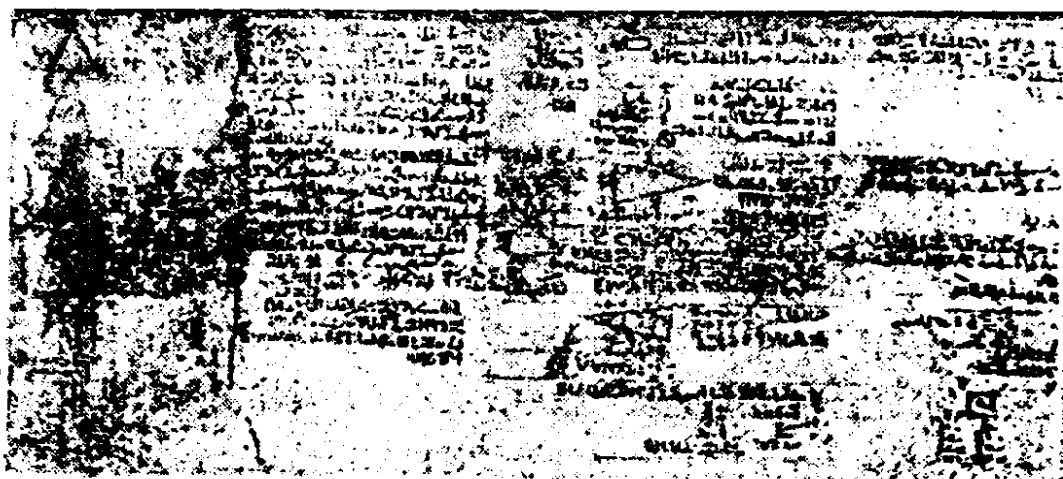


图 1-2 兰德纸草(第 10,11,13,14,15 页)

2. 古埃及人的算术知识

在莫斯科和兰德纸草中记载的 110 个数学问题多半来源于实际计算。由于任何一个自然数都可以由 2 的各次幂的和组成。因此我们可以发现古埃及人的计算技术具有迭加的特

征。

通常进行加减法运算时,他们用添上或拆掉一些数字记号求得结果,而进行乘法或除法运算时,则需要利用连续加倍的运算来完成。

例如,计算: 27×31 。

因为 $27 = 2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 8 + 16$,

于是只要把 31 的这些倍数加起来,即可求得 27×31 的积。其作法如下:

* 1	31
* 2	62
4	124
* 8	248
* 16	<u>+ 496</u>
	837

把那些带有 * 号的 31 的倍数加起来,即得积 837。

又如计算: $745 \div 26$ 。

只要连续地把除数 26 加倍,直到再加倍就超过被除数 745 为止。其程序如下:



1	26
2	52
* 4	104
* 8	208
* + 16	<u>416</u>
28	


$$\begin{aligned}\therefore 745 &= 416 + 329 \\ &= 416 + 208 + 121\end{aligned}$$

$$=416+208+104+17。$$

从上述带有(*)号的各项,便可得出,其商为 $16+8+4=28$,其余数为17。

古埃及算术最可注意的方面是分数的记法和计算。

古埃及人通常用单位分数(指分子为1的分数)的和来表示分数。记法独特,如  表示 $\frac{1}{5}$,  表示 $\frac{1}{10}$,特殊分

数 $\frac{2}{3}$,表示为  。

兰德纸草里有个数表,它把分子为2而分母为5到100的奇数的这类分数,表达成为单位分数的和

用现代的记号,其首末几行可表示为:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

.....

$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$$

$$\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$$

这样古埃及人就可以利用这张表进行分数运算了。

例如要用5除以21。运算程序可以如下地进行:

$$\begin{aligned} \frac{5}{21} &= \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} = \frac{1}{21} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} \\ &= \frac{1}{21} + \frac{2}{14} + \frac{2}{42} = \frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} \\ &= \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}。 \end{aligned}$$

由于整数与分数的运算都较为繁复,古埃及算术难以发展到更高的水平。

3. 古埃及的代数

在兰德纸草上有一个方程问题：“有一堆（古埃及人把未知数称为‘堆’，它本来的意思是指数量是未知数的谷物的堆）它的 $\frac{2}{3}$ 加它的 $\frac{1}{2}$ ，加它的 $\frac{1}{7}$ ，再加全部共为33”，用现在的计算形式写出来就是：

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} = 33。$$

纸草作者用算术方法正确地解决了这个问题： $x = 14\frac{28}{97}$ ，但是分数部分写成

$$\frac{28}{97} = \frac{1}{4} + \frac{1}{97} + \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} + \frac{1}{194} + \frac{1}{388}。$$

在莫斯科纸草上有一个面积问题：“把一个面积为100的正方形分为两个小正方形，使其中一个的边长是另一个的四分之三”，写成现在的形式为

$$x^2 + y^2 = 100, \quad x : y = 1 : \frac{3}{4}。$$

纸草作者是这样解的：作一个边长为1的正方形，取它的 $\frac{3}{4}$ 为另一正方形的边，两个正方形的总面积为 $1\frac{9}{16}$ ，求出 $1\frac{9}{16}$ 的平方根为 $\frac{5}{4}$ 。求出100的平方根为10，用10除以 $\frac{5}{4}$ ，得到8，这就是其中一个正方形的边长。然后再将它乘以 $\frac{3}{4}$ ，即得另一正方形的边长为6。但是在整个解的过程中并没有说明为什么要这样做。

在兰德纸草中还出现了有关算术级数的问题：“5个人分100个面包，要求每个人所得的份数构成一个算术级数”。纸

草作者先令公差为最小项的 $5\frac{1}{2}$ 倍, 设最小项为 1, 于是得到级数: $1, 6\frac{1}{2}, 12, 17\frac{1}{2}, 23$; 但是这五项的和是 60。为了满足题设条件, 他把各项都分别乘以 $\frac{5}{3}$, 最后得到这个级数应该为 $1\frac{2}{3}, 10\frac{5}{6}, 20, 29\frac{1}{6}, 38\frac{1}{3}$ 。

由上所述, 古埃及人虽然能解决相当于今天解方程的问题, 但实质上用的是纯粹算术的方法, 还没有出现代数语言。并不存在解方程的概念。

4. 古埃及的几何

古代埃及人留下了许多气势宏伟的建筑, 其中最突出的是约公元前 2900 年兴建于下埃及的法老胡夫的金字塔, 高达 146.5 米, 塔基每边平均宽 230 米, 任何一边与此数值相差不超过 0.11 米, 正方程式度与水平程度的平均误差不超过万分之一。与金字塔媲美的另一建筑群是上埃及的阿蒙神庙。其中卡尔纳克的神庙主殿总面积达 5000 平方米, 有 134 根圆柱, 中间最高的 12 根高达 21 米。这些宏伟建筑的落成, 离不开几何学知识。

另一方面, 几何学也起源于古埃及的农业。在兰德纸草中有 19 个关于土地面积和谷仓容积的计算问题。表明当时的埃及人已经会正确计算矩形、三角形和梯形的面积, 并能对其他一些几何图形采用近似算法, 例如在求任意四边形的面积时, 出现过近似公式:

$$\frac{(a+b)}{2} \cdot \frac{(c+d)}{2} \text{ (其中 } a, b \text{ 和 } c, d \text{ 分别是四边形的两组对边)}。$$

古埃及人很可能已经知道了后来称为毕达哥拉斯定理的

个别特殊情况。例如，埃及人可能已知：把 12 个单位长的绳子用结分成长为 3、4、5 个单位的三段，可以用来构造直角，但是这种推测尚未被学者所公认。

在兰德纸草上有一个求圆形土地面积的例子。他们把圆面积表示为 $(\frac{8}{9}d)^2$ (其中 d 为圆的直径) 根据这个结果，可知当时埃及人所用的圆周率约为 3.1605……，与 π 值的误差仅约为 0.6%。

对立方体、柱体等体积的计算，他们给出一些计算的法则，其中有比较准确的也有较为粗略的。值得注意的是，在莫斯科纸草中有一个正四棱台的体积的具体计算方法上、下底面和中截面的面积之和乘以高的 $\frac{1}{3}$ 。用现代的记号表示为

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

其中， a 、 b 分别是上、下底面正方形的边长， h 是高。

这个计算与我们现在所用的公式完全相同，可以说这是埃及几何中最出色的成就之一。

二、古代巴比伦的数学

公元前 4000 年左右，生活在西亚的底格里斯河和幼发拉底河之间的地带，即“美索波达米亚”地区的人民相继创造了西亚上古时期的文明，已经有了象形文字，大约于公元前 1900 年形成了奴隶制的巴比伦王国。

从 19 世纪前期开始，在美索波达米亚工作的考古学家们进行了系统的挖掘工作，发现了大约 50 万块刻写着文字的“泥板”。古巴比伦人用一种断面呈三角形的笔在粘土板上刻出楔形的痕迹，称为楔形文字，这种泥板经晒干或烘烤之后，

遂被长时间地、完整地保留了下来。现在世界上许多博物馆，如著名的伦敦、巴黎、柏林等博物馆中都收藏有许多这类泥板。在发掘出来的 50 万块泥板中，约有 400 块是数学泥板，其中记载有数字表和数学问题。

1. 古代巴比伦的记数法与六十进位制

古代巴比伦人借助于符号 ∇ 和 \triangleleft ，可以表示所有的整数，如：

∇	$\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla$ 或 $\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$ 或 $\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$
1	2	3	4	5	6	7	
$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$	\triangleleft	$\triangleleft\nabla$	$\triangleleft\nabla\nabla$	$\triangleleft\nabla\nabla\nabla$	$\triangleleft\nabla\nabla\nabla\nabla$
8	9	10	11	12	20	30	40
$\triangleleft\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$	∇	$\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$	
50	60	70	80	120	130		

巴比伦数系的特点是六十进位制。地质学家 W·K·劳夫特斯于 1854 年发掘出两块泥板(称为森开莱泥板)其中一块上面刻着一个数列，用现代符号来写，前七个数是 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49。显然这是一个自然数平方的数列。49 以下自然应该是 64, 81, ...。但记载的却是 $1 \cdot 4, 1 \cdot 21 \dots$ 直到 $58 \cdot 1$ 。这个问题只有在六十进位记数制中才能得到妥善的解释：

$$1 \cdot 4 = 1 \times 60 + 4 = 64 = 8^2,$$

$$1 \cdot 21 = 1 \times 60 + 21 = 81 = 9^2,$$

.....

$$58 \cdot 1 = 58 \times 60 + 1 = 3481 = 59^2.$$

由上所述,古代巴比伦人已经懂得了用相同的符号可以按其位置不同来表示不同的数值,这种 60 进位的位值制记数法,是一项重要的贡献。但是这种记数法并不完善。例如




𐎶𐎶 𐎧𐎧 这个记号,既可以表示 $2 \times 60 + 20 = 140$,也可以表示为 $2 \times 60^2 + 20 = 7220$ 。他们用留空位的办法代表零。例如 𐎧 𐎶 𐎶𐎶 可以表示 $11 \times 60^2 + 5 = 39605$ 。此外,巴比伦人经常使用分数,而且通常总是以常数 60, $60^2, \dots$ 为分母。但是他们并没有像现代的十进位分数那样的记号,而是与表示整数的记号混淆使用。例如 𐎧𐎧 𐎶𐎶𐎶 作为分数时,可以表示为 $\frac{23}{60}$,也可以表示为 $\frac{20}{60} + \frac{3}{60^2}$ 。

𐎧𐎧 𐎶𐎶𐎶 𐎧𐎧𐎧 𐎶𐎶 既可表示为整数 $23 \times 60 + 32$,也可以表示为分数 $\frac{23}{60} + \frac{32}{60^2}$,还可以表示为 $23 + \frac{32}{60}$ 。因此,要弄清巴比伦数字的真正数值还必须联系上下文,依靠智力进行推定。

至于巴比伦人为什么要采用六十进位制呢?现代人们有种种的推测:一般认为 60 是许多简单数字如 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, \dots 的公倍数,它可以使一些较大单位的 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{10} \dots$ 的小单位,在转化为较大单位时成为整数。也有的认为 $60 = 12 \times 5$, 12 是一年包含的月数, 5 是一只手的手指数。

2. 古代巴比伦人的算术运算

巴比伦人对于加减法的运算只不过是加上或去掉些数字

记号而已,加法没有专门的记号,减法用记号  表示,例如  表示 $40-3$,关于乘法,巴比伦人是在整数范围内进行的,其记号是 ,如果要计算 36×5 ,他们的做法是 $30 \times 5 + 6 \times 5$ 。这可以看作是乘法分配律的萌芽。为了便于计算,他们大约在公元前 2000 年以前已经编制了从 1×1 到 60×60 的乘法表,并用来进行乘法运算了。

关于除法,巴比伦人进行的是整数除以整数的运算,这种运算可以采用与倒数相乘的办法来进行,于是经常要使用分数。在巴比伦人遗留下来的数学泥板中有许多数表,其中包括把 $\frac{1}{a}$ 形式的数(这里 $a = 2^x 3^y 5^z$)化为有限位的六十进制“小数”。这个倒数表可以用现代的记号表示为

2	30			
3	20			
.....				
1	20	45		
1	21	44	26	40

其意思是

$$\frac{1}{2} = \frac{30}{60},$$

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{60},$$

.....

$$\frac{1}{80} = \frac{45}{60^2},$$

$$\frac{1}{81} = \frac{160000}{60^4}。$$

对于不能写作有限位“小数”的数如 $\frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}$ 等则用近

似值表示,例如把 $\frac{1}{7}$ 表示为

$$\frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17}{60^3} + \frac{8}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{17}{60^6}。$$

除了乘除法之外,巴比伦人还能借助于泥板上的数表来进行平方、开平方、立方、开立方的运算。对 $\sqrt{2}$ 的近似表达也已达到了很高的水平,但是还没有根据证明他们已认识了无理数。

3. 巴比伦的代数知识

大约于公元前 2000 年,古代巴比伦人已能使用代表抽象概念的代数语言,可能由于许多代数问题都与几何有关,因此他们常常用“长”,“宽”,“面积”来代表未知数和它们的乘积等。

例如“给定矩形的周长和面积,试求边长”也就是相当于求解方程组

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$$

早期巴比伦代数中的一个基本问题是:“求一个数,使它和它的倒数之和等于一个给定的数。”用现代的记号来写就是

$$x + \frac{1}{x} = a, \quad \text{即} \quad x^2 - ax + 1 = 0。$$

对于这个二次方程,他们给出的答案相当于

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1} \text{ 和 } \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}。$$

由于当时还没有负数的概念,所以负根略去不记,这表明巴比伦人实际上已经会解二次方程了。

通过解二次方程可以求解一些高次方程。例如“我把长乘宽的面积 10,我把长自乘的面积,我把长大于宽的量自乘,再

把这个结果乘以 9, 这个面积等于长自乘所得的面积, 问长和宽各是多少?”

用现代的记号表示为方程组

$$\begin{cases} xy=10, \\ 9(x-y)^2=x^2. \end{cases}$$

在求复利问题的时候, 甚至巴比伦人还能解指数方程。例如“有一笔钱, 利息率为每年 20%, 问经过多长时间以后利息与本金相等?”这实际上是求解指数方程

$$(1.2)^x=2.$$

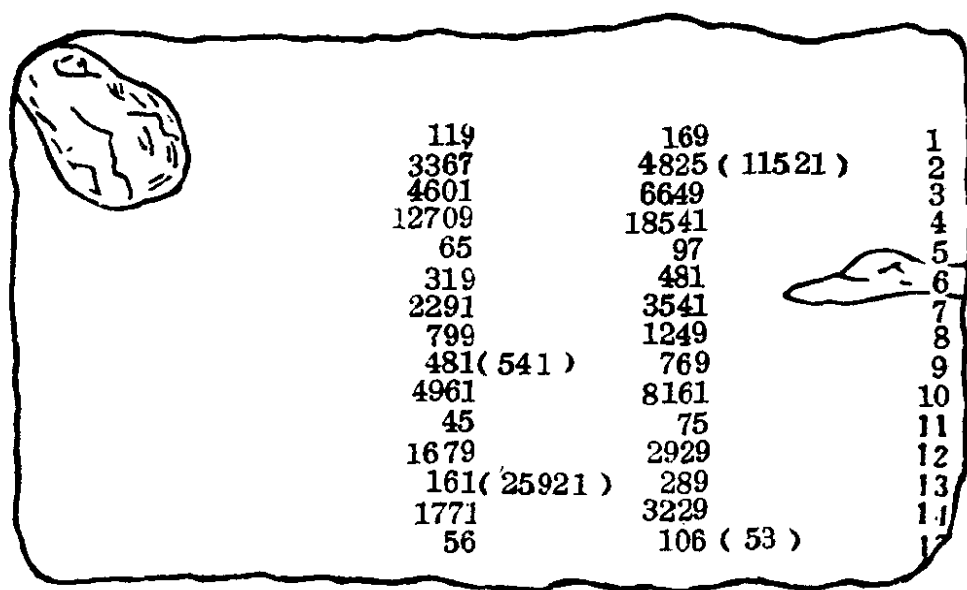
解的结果是 $x=4$ 年减去 $(2+\frac{33}{60}+\frac{20}{60^2})$ 月。

上述例子表明古代巴比伦在代数学上的成就确实很高。

纽格包尔 (Otto Neugebauer) 和萨克斯 (Sachs) 于 1945 年对收藏在哥伦比亚大学普林顿收藏馆的第 322 号巴比伦数学泥板 (简称为普林顿 322 号) 作了成功的解释。普林顿 322 号包括基本上完整的三列数字。左边应该还有第四列数, 但已佚失。将它用现代十进位符号改写, 得到图 1-3。显然最右边的那一列只不过是用来表示行数的, 他们两人还发现: 两列中的对应数字 (除了四个例外) 正好构成一个边长为正整数的直角三角形的斜边 (图 1-3 中的中间一列) 和一个直角边。在图 1-3 中带括号的四个值是例外值, 放在经我们改正的数字的右边。

现在人们把象 (3, 4, 5) 这样一组能作为一个直角三角形的边的正整数称为毕达哥拉斯数 (简称为毕氏三数) 如果这样一组数除了 1 以外, 没有其他公因子, 则就称它为素毕氏三数。(3, 4, 5) 是素毕氏三数, 而 (6, 8, 10) 则不是。

现在我们已经证明了所有的素毕氏三数 (a, b, c) 能用下列参数式表达:



119	169	1
3367	4825 (11521)	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481(541)	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161(25921)	289	13
1771	3229	14
56	106 (53)	15

图 1-3

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>u</i>	<i>v</i>
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

图 1-4

$$a=2uv, b=u^2-v^2, c=u^2+v^2。$$

这里, u 和 v 互素, 奇偶性不同, 并且 $u > v$, 例如, $u=2, v=1$ 则得素毕氏三数 $a=4, b=3, c=5$ 。

假定我们用普林顿 322 号数学泥板上给出的斜边 c 和直

角边 b 来确定那个边为正整数的直角三角形的另一边 a , 则得如图 1-4 的毕氏三数。我们还注意到, 图 1-4 中的毕氏三数, 除了第 11 行和第 15 行外, 都是素毕氏三数。为了便于研究和讨论, 我们也列出了这些毕氏三数的参数值 u 和 v 。(图 1-4)对数学泥板的解释工作现在还在继续进行, 今后也许还会有新的发现。

4. 巴比伦的几何知识

古代巴比伦人的几何知识, 与他们在代数学上所取得的成就来比, 相对地要逊色得多。巴比伦几何学的主要特征是它的代数性质, 一些比较复杂的问题虽然以几何术语来表达, 但实质上还是一些特殊的代数问题。从泥板的资料可知巴比伦人在公元前 2000 年到前 1600 年, 就能计算长方形、直角三角形和等腰三角形(也许还知道一般三角形)的面积, 长方体以及以特殊梯形为底的直棱柱体积, 在计算圆的周长和面积时取 π 值为 3。

从上述两个古代东方文明古国的数学知识来看, 他们各自独立地发明了计数和计算方法, 如果说古巴比伦人突出的成就在于代数方面的话, 则古埃及人却是在几何方面。

第二节 中国春秋战国以前的 数学、墨家学派

距今约一万年, 我国进入新石器时代, 在浙江余姚的河姆渡发现了七千年前的遗址。著名的西安半坡遗址距今约 6 千年。公元前 21 世纪(距今四千多年)出现夏朝。约 500 年后由商朝代替。公元前 1200 年建立周朝, 公元前 771 年的周朝称为西周, 以后进入春秋时代。

我国最早数学起源,当为结绳和刻划,在半坡遗址中,发现点群图案,说明已有较抽象的数字概念如图 1-5(a)。出土的石器和陶器(新石器时代)以及陶器上的花纹反映了当时人们对一些物体的形状、大小和位置关系的认识,特别是西安半坡新石器遗址出土的陶器,其几何形状丰富多采。其中三足陶器,除了反映出“三”这个数目以外,还说明当时人们已经有了三足具有稳定性的知识。在半坡遗址出土的大批陶器中,还有很多纺轮。它们的形状有的是圆柱形,有的是圆台形(图 1-5 的(b)、(c))。又如河北磁县下潘汪新石器时代遗址出土陶器的口沿不仅是规则的圆形,而且底周外缘有花牙子,牙距比较均匀,明显地反映了等分圆周的思想(图 1-6)。

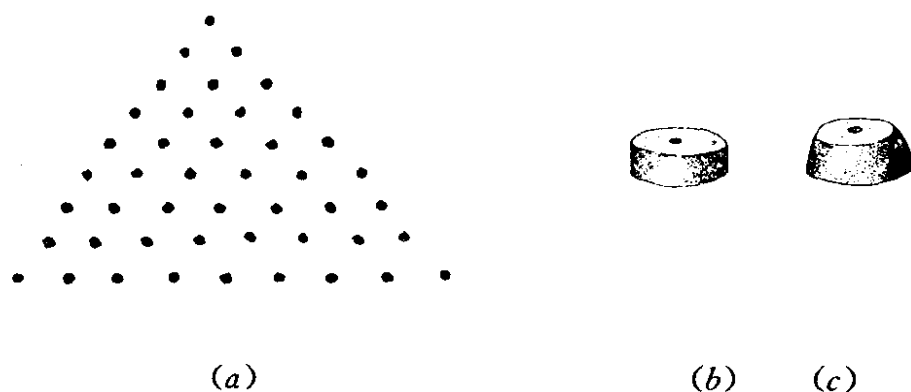


图 1-5

(a)半坡出土陶片上点群图案, (b)半坡出土的圆柱形陶纺轮,
(c)半坡出土的圆台形陶纺轮

另外,新石器时代遗留下来的陶器上的花纹和图案,对研究古代的数学尤其是几何学的起源,具有一定的启发性。例如河姆渡出土的新石器时代的陶钵底上刻着四叶纹(图 1-7),这是形成“二”、“三”、“四”等数目意识的依据。半坡出土的彩陶向人们提供了一个猜测几何图形来源的一种途径,由某种自然物如鱼的形状逐渐演变成几何图案(图 1-8)。由鱼形演

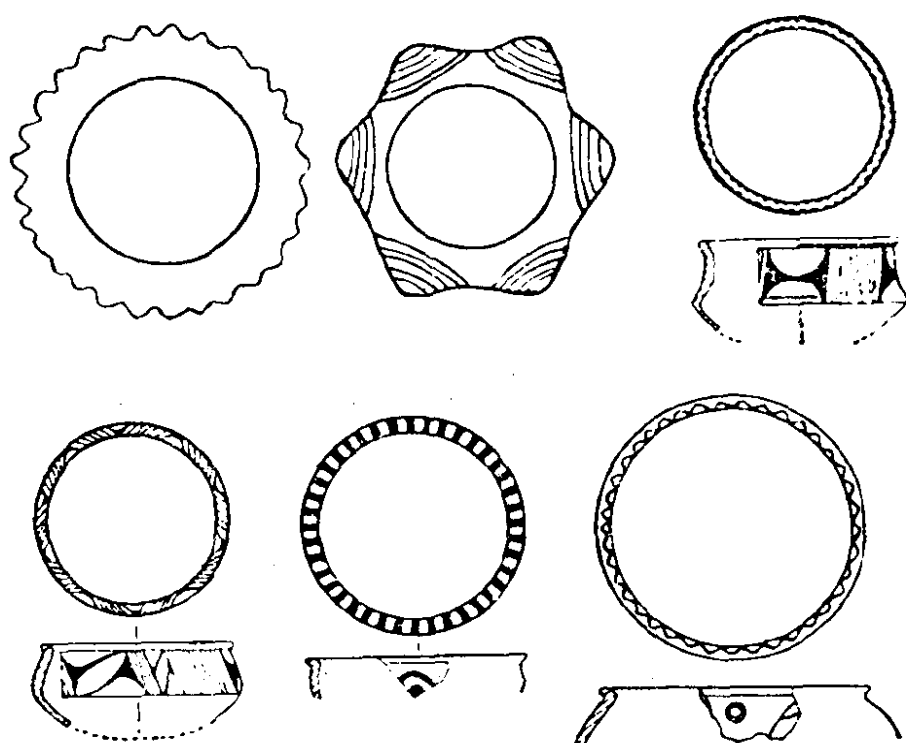


图 1-6 下潘汪出土陶器口沿形状

变成不规则的梭形或菱形、三角形等,再变成比较规则的几何形。看来是比较合乎实际的。半坡出土的彩陶上的几何图案有平行线、折线、三角形、菱形、圆、长方形等(图 1-9),三角形又可细分为任意三角形、直角三角形、等腰三角形等等。这些事实说明早在六千年以前,我们的祖先已经能够绘制初等平面几何中的大多数直线图形了。



图 1-7

河姆渡陶器上的四叶纹

从稍晚期的新石器时代遗址出土的陶器花纹来看,人们

的几何知识有了发展,如下潘汪遗址出土的陶盆上有很多几何图案,圆弧形和其他曲线形图案有了显著的增加,盆口沿上的花纹体现了比较准确的等分圆周的图形(图 1-6)。



(a)



(b)

图 1-8 半坡出土陶器反映几何图形演变的图案



(a)



(b)



(c)



(d)

图 1-9 半坡出土陶器上的几何图案



甘肃景泰县张家台出土的新石器时代的彩罐上有很规则的平行线、三角形、圆弧等几何图案(图 1-10)。

在奴隶制经济发展时期出现了商代的甲骨文和周代的金文，

标志着我国的文字从简单的象形逐渐发展到成熟的阶段，科技和文化都达到了较高的水平，这对于数学的发展起到了推动的作用。

在商代的一片甲骨文上有从 1 到 10 的不和实物连在一起的全部十个自然数(图 1-11)，说明了商代已经有了抽象的自然数概念。甲骨文中的数目是十进位的，除了 1 到 10 每个数字都有文字符号以外，还有与“百”、“千”、“万”相应的文字符号。如图 1-12 所示。

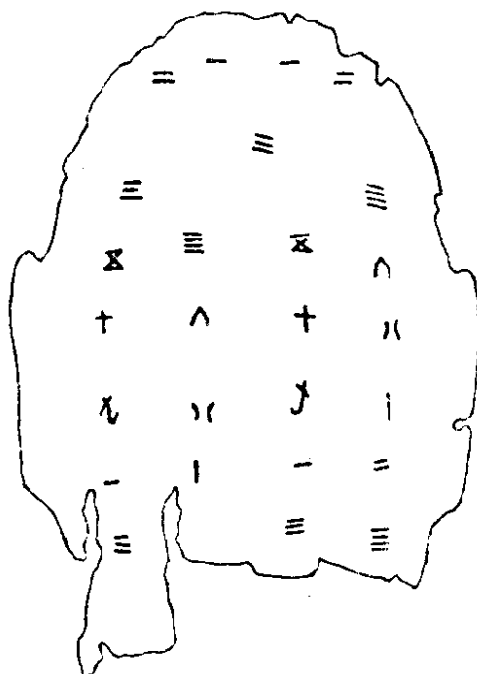


图 1-11 甲骨上的数目字

一	二	三	四	五	六
1	2	3	4	5	6
七	八	九	十	百	千
7	8	9	10	百	千
					万

图 1-12

关于十、百、千、万的倍数大都采用合书的方式。如图 1-13 所示。

U	U	U	土	木	千	火
			干	介		
20	30	40	50	60	70	80
百	百	百	百	百	百	百
200	300	400	500	600	800	900
千	千	千	千	千	千	千
2000	3000	4000	5000	6000	8000	30000

图 1-13

在甲骨文中最大的数目字当时已经达到“三万”。

在商代的记数法中还有一种六十循环的办法，这就是主要用在历法上的所谓“天干地支”。天干有 10 个，即甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；地支有 12 个，即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。从干、支的头一个字甲、子开始，依次各取一个，配成甲子、乙丑、丙寅、……干或支取完了接着循环再取，直到癸亥，共取 60 次以后，又是出现甲子一个循环。在商代的一片甲骨上就有一个完整的甲子表。我们现在对年满 60 周岁的长者，还称年逾花甲。现在农历一直还在沿用着干支记年的方法。

甲骨文中数目字的写法是从新石器时代的刻划符号发展而来的。数学的“数”字是从结绳的形象而来，甲骨文中“数”字写做𠄎，从娄从系，就是将绳子打上结，束成小把的计算。

商代至少应有加法、减法和乘法运算,只是没有明确的记载。实际上,甲骨文只能记录结果,而不能记载算法和运算过程。

周代以后有了一些运算的记载,例如战国时李悝(音魁 kuí)在《法经》中以一户农民为例计算了收支情况:“今一夫挟五口,治田百亩,岁收亩一石半,为粟百五十石(用现代记号来写就是 $1.5 \times 100 = 150$,下同),除十一之税十五石($\frac{150}{10} = 15$),余百三十五石($150 - 15 = 135$)。食:人月一石半,五人终岁为粟九十石($1.5 \times 12 \times 5 = 90$),余有四十五石($135 - 90 = 45$)。石三十[钱],为钱千三百五十($30 \times 45 = 1350$),除社间尝新春秋之祠用钱三百,余千五十($1350 - 300 = 1050$)。衣:五人终岁用千五百,不足四百五十($1050 - 1500 = -450$)”。这笔帐里用到了减法、乘法和除法,由于加法早已通行,所以这里算术四则运算已经齐备了。特别值得注意的是计算中最后还出现了“不足”的数,李悝未必理解现代观点下的负数,但却为负数概念的形成提供了实例。

从出土的文物来看,春秋战国时期的文献中已有乘法口诀。次序与现代不同,由“九九八十一”开始。因此又称乘法口诀或乘法表为“九九”,这种次序流行了一千六、七百年,直到南宋初才改为现今的顺序。

我国使用分数的时间应该很早,至迟在春秋战国时期(特别是战国)的著作中有许多有关分数及其应用的记载。例如《墨子》中讲到有关食盐分配问题时有:“二升少半”和“一升大半”的记载。其中“少半”和“大半”就是 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$,还有当时称“半”的,即为 $\frac{1}{2}$ 。这些都是当时分数的专用名词。《商君书》中

有这样的记载：“地方百里者，山陵处计一，薮泽处计一，谿谷流水处计一，都邑蹊道处计一，恶田处计二，良田处计四”。就是说一百平方里的地区内各种地貌所占的比例是多少，即前四种各占 $\frac{1}{10}$ ，后两种分别为 $\frac{2}{10}$ 和 $\frac{4}{10}$ 。《考工记》是一部技术手册，其中包括有些器具的规格，不仅用到大量分数，而且有了分数运算的萌芽。例如“六分其轮崇，以其一为牙围，叁分其牙围漆其二”。就是说把轮崇六等分，取其一份（即轮崇的 $\frac{1}{6}$ ）为牙围，再把牙围三等分，让其中的二份（即牙围的 $\frac{2}{3}$ ）涂上漆。

甲骨文中“正河”的记载。所谓“正河”就是兴修水利。夏、商时代已开始兴修水利工程，相传夏禹曾领导过治水。另外考古学家从河南偃师二里头发掘出来的商初时代宫殿遗址，规模宏伟，单是台基面积就约有一万平方米，墙基很直，柱孔排列整齐，并且分布均匀。这样的大型建筑以及水利工程等必然要用到测绘和几何知识。

《史记·夏本纪》在讲到夏代的一次治水工程时，提到了“准绳”和“规矩”，“准绳”是指水准测量或直线测量，“规矩”则是两件绘图工具，就是画圆的规和画直线及直角的矩。商代的甲骨文中规写作“𠄎”，矩写作“𠄎”，后来的矩是曲尺形。由此推测规矩的发明可能还要早得多。

公元前100年左右成书的《周髀（音毕 bǐ）算经》卷上记载着商高回答周公的话：“……故折矩以为句（音 gōu，与勾同）广三，股修四经隅（弦）五……”，这就是说，大约在公元前1100年的时候，已经有了“勾三股四弦五”这个勾股定理的特殊情况，但不足以肯定商高时代（周初约公元前1100年）对勾股定理的一般情况已经有了认识。《周髀算经》内有应用勾平

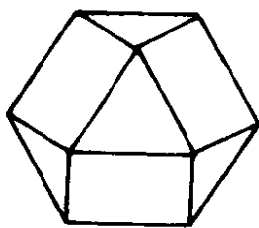
方加股平方等于弦平方的公式,但没有证明。

商代已普遍使用车子,仅考古学家在河南安阳殷墟就多次发现过车子的遗迹。制造车子需要用到等分圆弧的知识,这足以表明当时已会运用测绘工具及必要的计算。

春秋战国时代由于战争和生产的需要,修建了不少军事工程和水利工程,这就必须进行测量和设计、包括统计工程的期限,需用的材料,土方的多少等等,这必然涉及大量几何知识,包括立体几何的体积计算(土方的计算)以及平面几何对长方形、三角形、梯形、圆等等的面积计算。

各种形状的磨制品在春秋战国时期的遗物中也屡有发现,其中最引人注意的是 1971 年在山东临淄郎家庄出土的约公元前 500—400 年的殉人墓中的水晶珠(图 1-14)。这种水晶珠呈简单的半正多面体形状,通过观察,可知其磨制过程:先把水晶块磨成正六面体,再磨去八个角(有一定要求)便形成一种半正多面体。它的表面由六个相等的正方形和八个相等的三角形构成。并且所有的二面角都相等。这个水晶珠体现了当时很高的工艺水平和几何水平。

在同一殉人墓中出土的一件漆器上还有很规则的正方形、平行线、三角形、平行四边形、菱形、长方形、同心圆等等各种几何图形(图 1-15)。



半正多面体
水晶珠

图 1-14

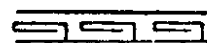


图 1-15 郎家庄出土漆器的几何图案

战国时期已经有了很好的技术平面图。例如在河北省出土的战国时中山国墓中的一块铜片上有一幅建筑平面图,表现出当时制图技巧已达到很高的水平。

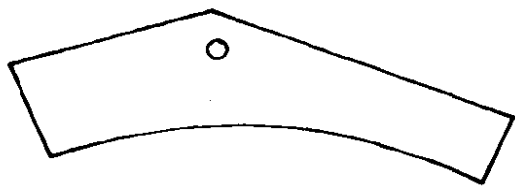


图 1-16 古磬的线图

战国时,在制造各种工具、器械、乐器过程中,常常会遇到需要用到角的概念。在《考工记》一书中对于角和几种特殊角都有专门的名称,把非直角的角称为“倨句(音具勾 ju gou)”,“倨”是钝角,“句”是锐角。直角称为“倨句中矩”或简称“一矩”。例如“磬氏为磬;倨句一矩有半”。“磬”是古代的一种石制乐器(图 1-16),把大小不等的几个磬按大小次序为一组吊起来敲打即可发生乐声,“磬氏”是指制造石磬的工匠。“倨句一矩有半”是指石磬背部的折角的规格,其大小是一个直角(矩)再加上半个直角,相当于 $90^\circ + \frac{1}{2} \times 90^\circ = 135^\circ$ 。在同一书中还有关于车辆规格的记载,包括一些构件角度大小的规定,并且把不同角度的构件取了专门名称,即“车人之事:半矩谓之宣,一宣有半谓之楸(音竹 zhú),一楸有半谓之柯,一柯有半谓之磬折”。角度的大小相当于:

$$\text{宣为 } \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ;$$

$$\text{楸为 } 45^\circ + \frac{1}{2} \times 45^\circ = 67^\circ 30';$$

$$\text{柯为 } 67^\circ 30' + \frac{1}{2} \times 67^\circ 30' = 101^\circ 15';$$

$$\text{磬折为 } 101^\circ 15' + \frac{1}{2} \times 101^\circ 15' = 151^\circ 52' 5''.$$

其中磬折就是石磬背部的标准折角。

通过上述数学知识的长期积累,到春秋战国时代,内容已经相当丰富了,于是人们必然要尝试进行理论的研究和提出看法。《墨子》等书中所讨论的若干几何概念就是数学理论研究在我国最初尝试的体现。《墨子》一书是我国墨家学派的一本内容丰富的科学论著,其中包括《经上》、《经说上》、《经下》和《经说下》四篇,合称《墨经》,对光学力学、逻辑学和几何学等方面的问题都试图从理论上进行探讨。墨家学派在某些方面和稍晚的希腊学者亚里士多德(Aristotle,公元前384~322年)很相似。他们都曾尝试把形式逻辑学用于数学(主要是几何)。如果说亚里士多德是西方逻辑形式系统的创造者的话,那么墨家学派则是东方逻辑学的奠基人。

《墨经》中记载着墨家给一些几何概念所下的定义。如:

“平,同高也”。这是“平”的定义,可能是指平行线。

“直,参也”。这是直线的定义,“参”就是“三”,是说三个点共线的问题。

“同长,以正相尽也”。这是两线段相等的定义,“正相尽”是说正好重合的意思。

“中,同长也”。这是线段中点的定义。“中”即线段的中点。“同长”是说中点到线段两个端点的距离相等。

还有如:“圜,一中同长也”。“圜”就是圆,这是关于圆的定义。“一中”是说有一个中心,“一中同长”是说到一个中心有相等距离的点所构成的图形。

“方,柱隅四匝也”。这是关于正方形或矩形的定义。

此外《墨经》还有关于点、线、面、体的说明,以及它们之间的关系。甚至书中还有“穷,或有前不容尺也”的断言,意思是:用一个线段去量另一个线段总能量到不够量的时候。

所有这些都是尝试用形式逻辑方法去定义几何概念。从

上述的这些定义来看,除少数有些说法不够清楚以外,大多数说法还是很有道理的。可惜的是没有能够形成形式逻辑的演绎系统。

春秋战国时代的人们还对数的起源问题提出了一些看法,事实上数与物质的关系是涉及到数学的一个重要哲学问题。《老子》一书回答了这个问题,该书下编第四十二章提出:“道生一,一生二,二生三,三生万物”。这里把“一”看成是万物的源泉,有了“一”才有万物,而“一”又是从一种非物质的“道”生成的,这种说法颠倒了数和物质本来应有的前后次序关系。《老子》中所说的这种观点与古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras,公元前六世纪人)学派所提倡的数为万物之源说,即把数看做是万物的本源,从本质上来说倒是一致的。

第三节 各种计数制、中国的位置记数法、算筹与零

人类对数目的认识,最初是从“一”和“多”开始的。后来逐渐有了“二”、“三”等数目的意识。但这种原始的数目意识都是和具体的事物对象联系在一起的,例如二头牛、三根木棍等等。进一步的发展是采用手指、树枝或贝壳等计数,通过简单的对应关系“数”(shǔ)出某种物体的个数来,其实际含义是物体的个数“与手指、树枝、或贝壳一样多”。据说汉语中“二”的读音就出自于“耳”(与耳朵一样多),印度佛教用语中的“五”与波斯语的“手”很相近(像一只手的指头那样多)。人类长期在数目观念的基础上,逐步产生了认识上的飞跃,才出现了抽象的数的概念,因此我们可以说,“数”(shù)来源于“数”(shǔ)。这一点,也可以从小孩子学习数目的过程得到印证。

随着社会实践活动的不断深化,当需要计数的数目很大,即当树枝、贝壳不够“数”(shǔ)或需要把计算结果保留下来的时候,就暴露出以一物表示另一物的原始记数法不能适应客观上对记数的需要。于是利用符号代替树枝、贝壳等实物记数的问题就提到日程上来了。

现今国际通用的记录数目的方法,是用阿拉伯数码表示的位置记数法,它的好处是简便易行,可是,历史上的记数法却是五花八门的。其中,我国古代的记数很早就采用位置制,相当先进,而古埃及、巴比伦等地的记数法就相当繁复了。这三种记数法前面已提及,不赘述,这里再补充罗马和古希腊的记数法。

一、罗马数字

在这种数字表示方法中, $1, 10, 10^2, 10^3$ 的基本符号为 I, X, C, M, 再加上表示 5, 50, 500 的 V, L, D, 另有一减法原则:在一个较大单位的符号之前放一较小单位的符号,就表示这两个单位之差,这种记数法在欧洲一直沿用到现在,例如:

$$\begin{aligned} 1944 &= \text{MDCCCCXXXXIIII} \text{ (未用减法原则)} \\ &= \text{MCMXLIV} \text{ (用减法原则)} \end{aligned}$$

二、希腊字码数字

古希腊的记数方法是用 27 个希腊字母表示,例如 1, 2, 3 用 α, β, γ 表示 30, 40, 50 用 λ, μ, ν 表示, 100, 200 则用 ρ, σ 表示, 因而 241 应写成 $\sigma\mu\alpha$ 。



大约在公元前 770 年至前 221 年,春秋战国时期,我国已出现了用算筹记数,并采用位置记数法。所谓算筹,有时也称“算”或“筹”,是指用来记数或计算的一种竹制的工具(小竹

棍),从古书的记载以及考古出土的算筹实物来看,从汉到隋朝,算筹由相当于现在的长约 13.5 厘米,直径约 0.3 厘米演变为长约 8 厘米,直径约 0.4 厘米,这种算筹逐步改短的趋势,无疑是为了运用起来比较方便的缘故,算筹既有细长的圆柱形、也还有棱柱形的,除了用竹制之外,也有木制的,骨制的,甚至讲究的还有用象牙制作的。计算时把筹放在桌子或茶几上,后来有的数学家在专用的毡毯上或算板上进行计算,算筹不用时可以安放在筒子或算袋里,这样外出携带也很方便。随着我国传统数学东传朝鲜、日本后,算筹也成为朝鲜、日本通行的计算工具。

古代算筹的功用大致和后来的算盘珠相仿。五以下数用几根筹表示几,6、7、8、9 四个数目,用一根筹放在上边表示五,余下来每一根筹表示一,放在下边,用算筹表示数目时有纵、横两种方式:

纵式: | || ||| |||| ||||| 丅 𠄎 𠄏 𠄐

横式: 一 二 三 𠄑 𠄒 𠄓 𠄔 𠄕 𠄖

1 2 3 4 5 6 7 8 9

我国的算筹采用位置计数法,即将万,千,百,十等意义,通过数码所在位置加以表示,若要表示一个多位数,可像现在用阿拉伯数码记数一样,把各位的数目从左到右横列。为了醒目,各位数目的筹式需要纵横相间,个位数用纵式表示,十位数用横式,百位、万位用纵式,千位、十万位用横式,以此类推,交替使用纵横两式。如 7826 用算筹表示出来是 𠄎 𠄏 = 丅,遇到数字有空位,如 78026 则用算筹表示为 𠄎 𠄕 = 丅,这时百位上是空位,不放算筹,由于每位数字记法需纵横相间,中

间有没有空位是容易辨别的。显然这种位置计数法,比同时代的罗马记数法要先进多了。

为了使初学者便于用算筹记数,古代数学书《孙子算经》与《夏侯阳算经》中编有押韵的口诀,易读易记,前者提出“凡算之法,先识其位。一纵十横,百立千僵、千十相望,万百相当”。后者又加了四句“满六以上,五在上方。六不积算,五不单张”。这种算筹记数的方法一直到元代末年,算盘取代算筹以后,前后约沿用了两千多年。

虽然算筹当时还没有表示空位的数学符号,但“不放筹”是确有其内容的,它显示了其他数字的确定位置,这实际上是一种以不表示为表示的办法。然而,“不放筹”的做法终究还是有缺陷的。例如 60002 在刻有位置的筹算板上是容易辨认的,如果写在纸上 $\text{丁} \quad \parallel$ 其间到底有一个、三个,还是有五个等的空位呢? 就难以确定了。

对于空位印度人起初也采用“空”表示(即空一段距离)与中国人类似,所不同的是印度人使用数码,而中国人则利用算筹,大约在公元三四世纪,印度人开始出现用小点“ \cdot ”表示空位的做法,公元八世纪初印度数码传入中国,空位仍然用“ \cdot ”表示,可是印度数码没有引起我国的重视。印度数码于中世纪传入阿拉伯后,受到了重视,经过阿拉伯的演变后又传入欧洲从而形成了现今的数码的形式流行于世界。印度人究竟在什么时候把“ \cdot ”改为“0”的,现在很难断定。不过据印度九世纪的石碑上的记载,已经出现用“0”替代“ \cdot ”的现象,因此可以说零的符号最早出现于印度。

我国在唐、宋时期,数学与数学教学高度发展,算书大量出版,为了避免混淆,在 12 世纪(南宋)有的书上记叙数字时,开始用有形的符号“ \square ”来表示空位,我国古代原有用“ \square ”表

示文字中间空格的习惯,借来作为空缺数字的记号自然是很相宜的。后来为了书写方便,“□”写得快了,就逐渐改成为“○”了,这种推测应该说是比较合乎情理的。这时与现代使用的零符号“0”,除了稍圆了一点以外,已经没有什么不同了。17世纪我国翻译西方数学著作时均将阿拉伯数码改写成中国数字,其中特别地把“0”译为“○”。直到19世纪,仍然如此,随着清政府的闭关锁国政策的失败,符号“0”以及阿拉伯数码终于在辛亥革命后正式在我国通用。

从现在查有实据的泥板、纸草以及甲骨文、算筹等资料来看,我国记数法的出现虽然要晚于古埃及和巴比伦,但是我们的祖先独立地创造了科学记数法。古埃及是很早采用十进制的国家之一,但并不采用位置记数法。古巴比伦通常采用六十进位制,有的也采用十进制,甚至有的将两者混用,虽然巴比伦人已经懂得了用符号按位置来表示其数值的方法,但这种记数法并不完善,还不能说属于严格的位值制(详见第一节)。因此在埃及和巴比伦的记数及其运算都是比较麻烦的,显然不利于数学的进一步发展。而中国的记数法,不论是古代的算筹,还是后来的珠算都明确无误地显示了既是采用了十进制又是位值制的。这是中国人的一大创造。这种记数法在记数或计算上都要远比古埃及、巴比伦以及后来的希腊、罗马的记数法优越得多。对我国的数学、数学教育的发展影响极为深远。

由于我国用口语或文字表示一个数字都严格地遵从十进位值制,而且单音节数字发音简捷,这为青少年学习数学提供了方便。因此关于算筹记数口诀(“一纵十横,……”),乘法口诀(如“九九八十一”等)归除口诀(如“三一三十一”等),斤两换算口诀(如“一退六二五”等)等等都易读易记易学,有利于推动数学教育的发展。

十进位值制记数还有利于促成度量衡单位十进位制的实现。秦朝以前度量衡制十分紊乱,有二进制、四进制、八进制、十进制、十二进制、十六进制等等,为了避免度量衡单位与十进记数之间无谓的麻烦,秦汉以后逐步改革了度量衡制,到宋朝以后中国的度量衡制除斤两仍旧是十六进位,时辰仍不是十进位之外,一般都改为十进位制了。

因为我国采用十进位值制记数,因此在日常生产、生活实践中不论是用算筹或算盘进行加、减、乘、除四则运算都极方便,而且为完整的分数体系的建立(包括分数的记法,运算的发展)、十进制小数的引进创造了条件,最大公约数与最小公倍数得到了应用以及算术中各种“应用问题”(包括各种比例问题在内),都有了合理的解法。

另外十进位值制记数法不但可利用于记一个数字的各位数码,并且也可以利用来表达一个算式中的各项数字,也就是现在代数学中通常所说的分离系数法,利用分离系数法表达开方式不仅使得开平方、开立方、开带从平方、开带从立方都可以直接进行运算,而且为 11 世纪以后的增乘开方法的发明更进一步推广到求数字高次方程正根的方法的发现以及为 13 世纪中天元术和四元术的发展创造了良好的条件。

分离系数法还可以利用来表达包含几个不同未知数的多元方程。从而使得解一次联立方程组时消元简便,同时为负数概念及早的出现以及有理数运算法则的建立奠定了基础。

第四节 希腊早期的 数学、毕德哥拉斯学派

经过古埃及和巴比伦人长期积累数学知识的数学萌芽时

期以后,古希腊人把数学推进到一个崭新的时代。古希腊数学不仅有十分辉煌的研究成果,而且提出了数学的基本观点,建立数学理论的方法,给以后的数学发展提供了坚实的基础。

希腊数学的发展是和希腊社会、经济以及科学的发展分不开的,按照科学史的一般分期以及希腊数学研究中心的转移,通常把希腊开创的初等数学时期分为两个阶段。一、希腊早期数学,即古典时期的希腊数学。这个时期大约从公元前六世纪开始到公元前三世纪。二、后希腊时期的数学,即亚历山大里亚时期的希腊数学。这一时期大约从公元前三世纪到公元六世纪。这节我们讲希腊早期数学,即古典时期的希腊数学。

古代希腊的地理范围,包括希腊半岛、爱琴海诸岛和小亚细亚西部沿海地带(图 1-17)。这里自然条件优越。农业、手工业和航海业很早得到发展。公元前八世纪以后,希腊进入了奴隶制形成的阶段,社会、经济和科学进一步得到发展,产生了许多奴隶制城邦。他们虽然没有建立统一的国家,但是在文化、宗教、风俗习惯等方面基本保持一致。这些城邦加强了希腊和海外各地的商业联系,为接触并吸收优秀的东方文化提供了方便。

从公元前六世纪起,逐步形成以雅典为中心的古希腊,出现了欧洲文化的第一个高峰,古希腊数学仅是其中的重要成就之一。

古代希腊的第一个著名数学家是泰勒斯(Thales 约公元前 624~546 年)他生于小亚细亚爱奥尼亚地区的滨海城市米利都。公元前六世纪上半叶,泰勒斯曾经去巴比伦和埃及进行过商业活动,在那里学到了许多数学知识,他第一个把这些数学知识带回希腊,在米利都创立了爱奥尼亚学派。相传几何的

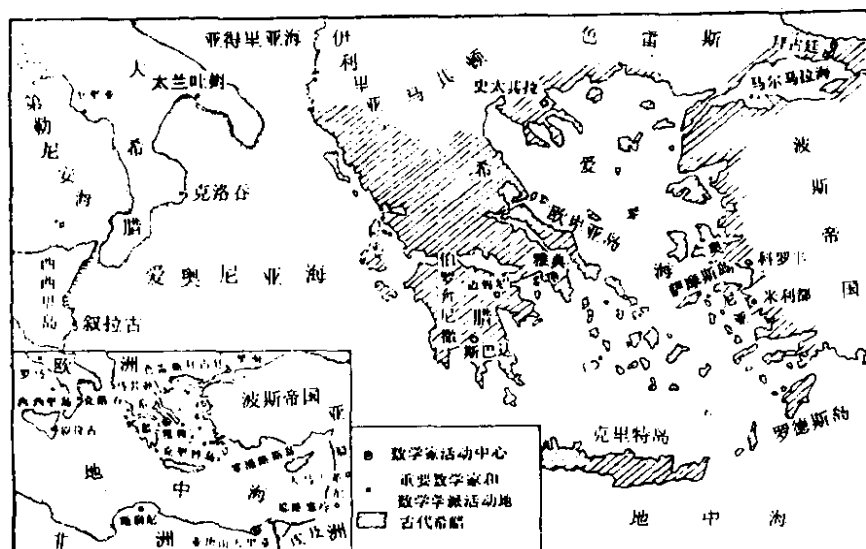


图 1-17 古代希腊重要数学家活动地区

证明是由泰勒斯开创的。

公元前六世纪末,爱奥尼亚陷于波斯人之手,希腊文化随着逃难人群而向西部传播,公元前 494 年,波斯统治者镇压了小亚细亚希腊人的反抗,血洗米利都,从此爱奥尼亚学派停止了活动。继爱奥尼亚学派之后推动数学发展的主要是毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯(Pythagoras, 公元前 572~497 年)出生于靠爱奥尼亚沿海的萨摩斯岛。青年时代,毕达哥拉斯曾就学于泰勒斯。以后他曾到亚洲和埃及旅行,特别是在埃及,他学到了很多数学知识。约在公元前 530 年,毕氏返回到故里,并建立了自己的学派。

由于毕达哥拉斯坚持奴隶主贵族的立场和利益,不久被迫迁到意大利东海岸的克罗吞。公元前 497 年由于他进行反对民主派的活动,被杀于米太旁登。

公元前 479 年,以雅典为主的希腊同盟军彻底击溃了波斯军队,从此雅典在经济和军事实力方面迅速繁荣起来,成为

一个气势宏伟的文化中心。于是许多优秀学者纷纷来到雅典，一时学派林立，学术上百花齐放，一片兴旺现象。

柏拉图(Plato, 公元前 427~347 年)是当时最著名的希腊哲学家之一，虽然他不是数学家，但热心于数学科学，为了表明数学在柏拉图学派中的重要地位，在柏拉图学园门口挂了一块“不懂几何者，不得入内”的牌子。值得注意的是，公元前四世纪的重要数学工作几乎都是柏拉图的朋友和学生搞的。再有与柏拉图学园有联系生于小亚细亚奈达斯的欧道克斯(Eudoxus, 公元前 408~355 年)是这一时期最大的数学家。他在几何学上的研究成果，后来有些收入了欧几里得的《几何原本》。这一时期值得一提的还有亚里士多德(Aristotle, 公元前 384~322 年)他生于马其顿的史太其拉。他青年时代就来到雅典。是柏拉图的学生和同事，相处达 20 年之久，公元前 335 年他成立了自己的学派。亚里士多德是古希腊哲学家中最博学的人。他的一些卓越思想在数学史上影响很大。

下面将概要地介绍古代希腊时期的数学成就，而这些成就的大部分将归功于毕达哥拉斯学派。

一、算术上的成就

1. 应用算术

在古希腊，由于商业、建筑业等，特别是天文学的需要，希腊人独立地创造了自己的记数法。古希腊时期的记数法有两种：一种是雅典记数法，另一种是爱奥尼亚记数法。

雅典记数法是在公元前三世纪以前发展起来的，它们构成一种由数字名称的头一个字母组成的以 10 为基的简单分群数系。除了表示 $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4$ 的符号 I, Δ , H, X, M 之外，还有一个表示 5 的特殊符号 Γ ，其中前者每个符号都可以

重复四次,后者符号 $\overline{\square}$ 既可以单独用,也可以与其他符号合起来用。例如 $\overline{\square}$ 表示 50, \overline{H} 表示 500, \overline{X} 表示 5000, \overline{M} 表示 50000,所有其他数字都可以借助这些符号按照加法原则来记,把各个符号并排写出。大数字在前面。例如 325 记作 $HHH \triangle \triangle \overline{\square}$, 2857 记作 $XX \overline{H} HHH \overline{\square} \overline{\square} ||$ 等。

爱奥尼亚记数法最早为毕达哥拉斯学派采用,这个数系以 10 为基,用 27 个文字来表示数。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
个	$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\epsilon}$	$\overline{\varsigma}$	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\theta}$
十	$\overline{\iota}$	$\overline{\kappa}$	$\overline{\lambda}$	$\overline{\mu}$	$\overline{\nu}$	$\overline{\xi}$	\overline{o}	$\overline{\pi}$	$\overline{\varrho}$
百	$\overline{\rho}$	$\overline{\sigma}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\upsilon}$	$\overline{\varphi}$	$\overline{\chi}$	$\overline{\psi}$	$\overline{\omega}$	$\overline{\vartheta}$

为了把数与字母加以区别,在数的符号上面画一条小的横线。例如: $12 = \overline{\iota\beta}$, $21 = \overline{\kappa\alpha}$, $247 = \overline{\sigma\mu\zeta}$, $805 = \overline{\omega\epsilon}$

尽管在爱奥尼亚记数法中已经有了位值制的胚芽,但是古希腊人终究未达到位值制记数法这一步。这个记数法的最大缺点是仍然使用了许多不同的符号,给运算带来了很大困难,同时也模糊了数学之间的简单关系,如奇偶区别等。不过,爱奥尼亚记数法显然比另一记数简便,因而很快就在全希腊推广了。到了亚历山大里亚时期,爱奥尼亚记数法就完全取代了另一记数法。

整数四则运算中的加、减、乘的运算从根本上说与现代的法则差不多,只是乘法运算是从高位到低位进行的。至于除法是怎样进行的,现在还不清楚。

希腊人把分数表示为两个整数之比 $\frac{m}{n}$ 。分数在古希腊的

应用不晚于公元前五世纪。

古希腊时期的数学家们对开方的计算一般是回避的。因为有可能遇到无理数。在不晚于公元前四世纪的时候,希腊数学家们已熟知一种求平方根的近似方法。

由于这一时期的数学家们鄙视应用算术,因而从泰勒斯起的三百年间,应用算术这个分支几乎没有什么进展。

2. 理论算术

所谓理论算术,是指与自然数运算的一般性质有关的数学知识的总和,实际上就是数论的雏型。

毕达哥拉斯学派把满足关系式(用现代记法): $1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$ 的数称为三角形数(图 1-18)。

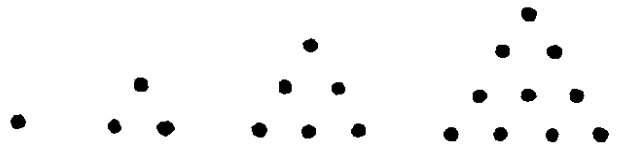


图 1-18

满足关系式: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 的数称为正方形数(图 1-19)。

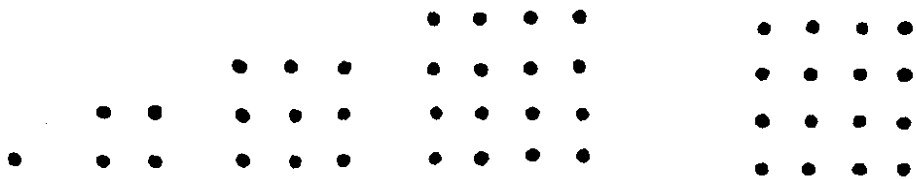


图 1-19

毕达哥拉斯学派还给出了可以用纯几何的方法来证明的一些有趣的定理:

例如:任何一个正方形数都是两个相继的三角形数之和(图 1-20)。

第 n 个五边形数等于第 $(n-1)$ 个三角形数的三倍加上 n (图 1-21)。

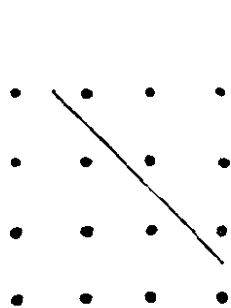


图 1-20

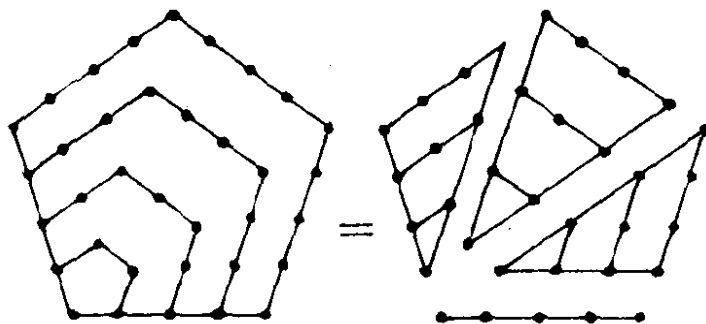


图 1-21

毕达哥拉斯学派还研究了毕氏三数(参阅本章第一节)以及算术平均数、几何平均数和调和平均数等。

二、几何上的成就

古典希腊时期最早研究几何的是爱奥尼亚学派,泰勒斯在埃及旅行的时候,利用等腰直角三角形相似的原理,解决了埃及祭司们难以解决的测量金字塔高度的问题。

泰勒斯确定了以下几条最早的几何定理:1)等腰三角形两底角相等;2)如果两个三角形有一边及这边上的两个角对应相等,那么这两个三角形全等;3)直角彼此相等;4)两条直线相交时,对顶角相等;5)圆的直径平分圆周。

至于爱奥尼亚学派是否对以上定理有过证明,现在还没有什么根据。但是可以肯定,是他们最早提出了某种逻辑推理。

使几何学从经验上升到理论的关键性贡献应归功于

于毕达哥拉斯学派。他们基本上建立了所有的直线形的理论,包括三角形全等定理、平行线理论、三角形的内角和、相似理论等等。

毕达哥拉斯学派掌握了正多边形和正多面体的一些性质,他们发现:同名正多边形覆盖平面的情况只有以下三种:而且这些正多边形个数之比为 $6:4:3$,而他们边数之比为 $3:4:6$ (图 1-22)。他们也研究了以立方体填满空间的问题。

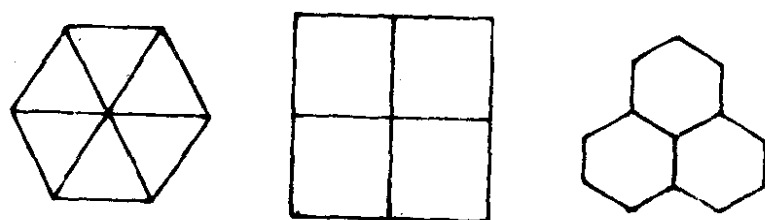


图 1-22

毕达哥拉斯学派对于直线形性质的最大贡献是关于直角三角形的斜边和直角边关系的定理,世称毕达哥拉斯定理(中国人称为勾股定理)。中国人、巴比伦人、埃及人和印度人都早就知道这个定理的特殊情况,不过只有古希腊人才以一般的形式得到了证明,而且许多数学史家都认为毕达哥拉斯学派是用比例和相似三角形的理论得到证明的。相传毕达哥拉斯证出这个定理以后,曾经宰了 100 头牛以示庆祝。

毕达哥拉斯学派在研究数学的方法上,有一个很大的特点,那就是注意形与数的密切结合。

几何、算术、天文和音乐方面的大量成果深深地激励着毕达哥拉斯学派的数学家们,他们相信宇宙万物总可归结为简单的整数和整数之比,他们对一些几何定理的证明建立在任何量都可通约的这个信念上。然而,大约在公元前五世纪末传

说由希帕苏斯(Hippasus)发现了不可通约量的存在,这对毕氏学派的“一切量均可通约”的观念是一个莫大的打击。数学史上把这称为第一次数学危机。

总之,古典希腊时期的希腊人已掌握了大量初等几何知识,加上亚里士多德建立了形式逻辑(这是他对数学的最大贡献。虽然在他之前已有许多学者奠定了逻辑的基础)。这些都为形成一门独立的初等几何的理论科学作好了充分的准备。

关于古典希腊时期的几何部分,最后要提到的是:被称为几何“三大难题”。他们是指限用(无刻度的)直尺和圆规的三个作图题:1)作一立方体,使其体积等于已知立方体的两倍。简称为“倍立方”或“立方倍积”。2)三等分任意(一个)角。3)作一正方形,使其面积等于一个已知圆。简称为“化圆为方”。

古希腊人之所以要把作图工具只限于无刻度的直尺和圆规,是由于他们强调在研究一个概念之前必须证明它的存在。认为只有从真理出发,依靠演绎推理才能获得真理。他们认为直线和圆构成的图形可以由尺规作图而得在客观上是存在的,因而由直线和圆构成的图形才能逻辑推证其真实性。古希腊人的这些观念,禁锢了人们的思想,抑制了创造性。

几何三大难题于1837年万采尔(Wantzel, 1814~1848年)首先证明了“倍立方”与“三等分任意角”的问题不能用无刻度直尺和圆规求解。1882年林德曼(Lindeman, 1852~1939年)又证明了 π 的超越性,从而否定了用无刻度直尺和圆规的“化圆为方”的可能性。

古典希腊的代数是依附于几何的,称为“几何代数”。在毕达哥拉斯学派那里,已经开始了对几何代数的研究,后来经过欧道克斯的工作,奠定了它的理论基础。读者可参阅本章第五节欧几里得《几何原本》第二卷关于几何代数的内容。

第五节 欧几里得的《几何原本》、公理法

西方几何学源于埃及,经泰勒斯等人移于希腊的爱奥尼亚。又经毕达哥拉斯学派等转到雅典。此后数学研究中心再由希腊的雅典移到埃及的亚历山大城。欧几里得正处于这一亚历山大时代。欧几里得(Euclid 公元前 300 年前后)是希腊数学家,关于他的生平,现在知道的很少。根据其他一些零星的记载,欧几里得约公元前 330 年生于雅典,早年曾求学于柏拉图学院。托勒密王朝建立后,亚历山大城被建成为古代文化的中心。欧几里得长期住在亚历山大,并被托勒密一世聘为亚历山大学院主任教授主持那里的数学工作。他所著的《几何原本》^①是世界上最伟大的科学典籍之一。

相传托勒密国王曾问欧几里得,是否有比钻研《几何原本》更简捷的学习几何的途径,他断然回答道:“几何学中没有王者之路”。另外一则故事,是说一个学生跟欧几里得才开始学习第一个命题,就问学了几何学之后将得到些什么。欧几里得幽默地说:“给他三个钱币,因为他想在学习中获取实惠”。可见欧几里得主张学习必须循序渐进,刻苦钻研,反对投机取巧。他也反对学了一个命题就要实用的狭隘观点。当然,学习几何学最终是十分有用的。

除了《几何原本》以外,欧几里得还有不少著作,可惜大都失传了。即使现在看到的各种《几何原本》的版本,也都不是欧氏《几何原本》手稿的传本,而是根据后人的修订本、注释本、翻译本重新整理出来的。首次传入我国的《几何原本》是在元

^① 在我国 Elements 译作《几何原本》详见第二章第十节

朝,中文译名《兀忽列的四擎算法段数十部》由于没有多少学者对它感兴趣,不久也就失传了。在中国流传的《几何原本》的最早译本是1607年意大利传教士利玛窦(Matteo Ricci, 1552~1610年)和明朝徐光启(1562~1633年)合译的《几何原本》前6卷。所依据的版本是利玛窦的老师德国人克拉维乌斯(C·Clavius, 1537~1612年)校订增补的拉丁文15卷本。整整250年之后,即1857年,后9卷才由英国人伟烈亚力(Alexander Wylie, 1815~1887年)和我国清朝学者李善兰(1811~1882年)共同译出。但所根据的版本已不是克拉维乌斯的拉丁文本,而是从希腊文译成的另一种英文版本。1990年出版了兰纪正、朱恩宽用现代汉语翻译的《几何原本》,该书根据目前标准的希思(Thomas Little Heath, 1861~1940年)英译评注本《The thirteen books of Euclid's Elements》译出。

“几何”一词为徐光启和利玛窦所首创。一般认为此词兼有音译和意译的好处。首先,几何是 geometria 字头 geo 的音译。其次,在汉语里“几何”是“多少”、“若干”的意思,而《几何原本》实际包括了当时的全部数学。因此“几何”是意译。

欧几里得的《几何原本》是一部划时代的数学巨著,其伟大的历史意义在于它是用公理法建立演绎体系的最早典范。许多希腊学者做了大量的前驱工作,包括像毕达哥拉斯学派,发现了勾股定理,不可通约量,并且还知道五种正多面体的存在等,这些后来都成为《几何原本》的重要内容。毕氏学派还将算术和几何沟通起来,为《几何原本》算术的几何化提供了榜样。《几何原本》还包括了欧道克斯(Eudoxus)的许多定理和其他一些数学家的研究成果。欧几里得在前人的基础上,选定了若干公理,把当时数学的几乎所有定理按逻辑顺序排列起来,

并分别给予论证,使之成为一个完整的演绎体系,它在科学方法论上的意义已不仅限于数学。

《几何原本》主要内容

	定义	命题(作图)	中心内容
第一卷	23	48(14)	直线形
二	2	14(2)	面积的变换
三	11	37(6)	圆
四	7	16(16)	圆内接、外切多边形
五	18	25	比例论
六	4	33(10)	相似形
七	22	39	数论(约数、倍数,整数的比例)
八	0	27	数论(等比级数、连比平方数、立方数)
九	0	36	数论(连比,素数定理,偶数与奇数理论)
十	16	115	不可通约量理论
十一	28	39(4)	空间直线与平面
十二	0	18(2)	面积与体积(穷竭法)
十三	0	18	正多面体
共计	131	465(54)	

《几何原本》共有 13 卷,共计 465 个命题,其中包括 54 个作图题,有些版本为 15 卷,其中附加的两卷是后人所写的。《几何原本》的第一~四卷是讲直线形和圆的基本性质。第五、六卷是利用比例理论讨论相似形。第七、八、九卷讲数论,即讲述关于整数和整数之比的性质。第十卷主要讨论无理量。第 11~13 卷讨论立体几何及穷竭法(见表)。

《几何原本》第一卷首先给出 23 个定义。如“点是没有部分的”、“线只有长度而没有宽度”等等。还有平面、直角、锐角、钝角、平行线、圆等定义。其中例如最前面的 7 个定义中的“长

度”、“宽度”等本身还需要加以定义,而且以后的推理又完全没有用到这些定义。因此,这些定义在演绎中没有什么用处,实际上只是几何形象的直观描述而已。

23 个定义之后,欧几里得接着提出真实性无需证明的五个公设和五个公理,作为论证其他命题的依据。他采用亚里斯多德^①的说法,即公理是适用于一切科学的真理,而公设则仅适用于几何的。前 4 个公设是显而易见的。第五公设比较复杂“若一直线与两直线相交,而所构成的同旁内角的和小于两直角,则把这两直线延长,一定在那两个内角的一侧相交”。这就是后来引起很多议论的“欧几里得平行公设”或简称第五公设。从《几何原本》的产生到 19 世纪,很多数学家认为第五公设是一个可以证明的命题,但是他们的企图都没有获得成功,从而导致非欧几何的建立。

近代数学已不区分公设与公理,都称之为公理。《几何原本》后面各卷不再列出其他公理。这一卷在公理之后给出 48 个命题,讨论了关于直线和由直线构成的平面图形的性质,这 48 个命题又可分为三组:

第一组(命题 1-26)包括 9 个基本作图题(命题 1-3, 9-12, 22-23), 17 个证明题,主要是讨论三角形的性质,其中还包含三个三角形全等的判定法(命题 4, 8, 26),例如关于命题 4:“如果一个三角形的两边及其夹角分别等于另一个三角形的两边及其夹角,则这两个三角形全等”的证明,欧几里得采用在上述条件下移动图形使之一个三角形必然与另一三角形完全重合的方法。而图形移动的概念在欧氏演绎体系中是没有逻辑依据的。并且还得假定图形在移动过程中不改变它的性

^① 亚里斯多德(Aristotle),公元前 384~322 年)古希腊的哲学家。是形式逻辑的奠基人。

质(即线段的长短及角的大小不变等定量性质)才行。因此尽管欧几里得提出的公理法是伟大的创举,给数学的发展带来深远的影响,但当时《几何原本》的逻辑演绎体系确实还有不少漏洞和不够严密的地方。于是才有后来德国数学家希尔伯特(Hilbert)于 1899 年为完善数学体系的公理化而作的《几何基础》的出版。

第二组(命题 27~32)包括一个作图题主要是叙述平行理论,然后利用这些理论证明了重要的命题 32,即“三角形的一个外角等于两内对角的和,而且三角形的三个内角的和等于二直角”。

第三组(命题 33~48)包括四个作图题通过等积变形研究平行四边形、正方形和三角形,命题 47、48 是毕达哥拉斯定理及其逆定理。

《几何原本》第二卷只有 14 个命题,其中有两个作图题突出的内容是讨论面积的变换和毕氏学派的图形代数,由于希腊人不承认存在无理数,所以不能从数量上处理所有长度、面积、角度和体积。这样他们就用线段来代替数。两数的乘积变成两边长分别等于两数的矩形的面积。三数的乘积是一体积、两数相加被他们翻译成把一线段延长到使所增长的部分等于另一线段,减法被说成是从一线段中去掉另一线段之长。两数相除则仅用两线之比一语来表明。这是同其后在第五、第六卷里所引入的原则一致的。

第二卷的头几个命题从几何上处理了下述等价代数问题,其中有些用我们的记法为

$$(1) a(b+c+d+\cdots)=ab+ac+ad+\cdots;$$

$$(2) (a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2;$$

$$(3) (a+b)a=ab+a^2;$$

$$(4) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(5) ab + \left[\frac{1}{2}(a+b) - b\right]^2 = \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2;$$

$$(6) (2a+b)b + a^2 = (a+b)^2.$$

《几何原本》第三卷有 37 个命题,其中有六个作图题包括许多关于圆的弦、割线、切线、圆心角及圆周角等与圆有关的图形的定理。

第四卷包含了 16 个作图题,讨论了用直尺、圆规作圆的内接和外切图形,包括圆的内接、外切的正三角形、正方形、正五边形和正六边形,最后命题 16 在一个给定圆内作正 15 边形。

第三、四卷内容是毕达哥拉斯时代就已经知道了的。

第五卷是比例论,共计 25 个命题,后世的评论家认为这是《几何原本》的最高成就,毕达哥拉斯学派过去虽然也建立了比例论,不过只适用于可公度量,如果 a, b 两个量可公度,则 $a:b$ 是一个数(有理数)。但若 a, b 不可通约,希腊人包括欧几里得就根本不承认 $a:b$ 是一个数。为了摆脱这一困境,欧道克斯用公理法重新建立了比例论,使它适用于一切可公度与不可通约的量,因此这一卷主要取材于欧道克斯的工作成果,是对欧道克斯比例论的进一步阐述。在定义了量的比例以后,证明了一些比例的基本性质。

第六卷由 33 个命题组成,主要是利用比例理论讨论相似形问题。这一卷中还给出了一些归结为代数方程问题的几何解法。这一卷是对早期毕达哥拉斯学派的研究成果进行了再整理。

第七、八、九卷的内容是数论,分别有 39、27、36 个命题,这三卷是《几何原本》中纯粹讨论算术的唯一篇章,虽然其论

证并不依赖于几何,但完全用几何方式叙述(包括把数看成线段,两数乘积看成矩形以及陈述与证明都用文字)。

Liber I.

11

Item, sub aequalibus rectis lineis contentum, & basim BC basi EF aequalem habebunt; itaque triangulum BAC triangulo EDF aequale, ac reliqui anguli B, C reliquis angulis E, F aequales erunt, uterque utriusque, sub quibus aequalia latera subtenduntur.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE rectae AB superponatur, caderet punctum E in B, quia $DE = AB$. Item recta DF caderet a hyp. in AC, quia ang. $A = D$. Quinetiam punctum E puncto C coincideret, quia $AC = DF$. Ergo rectae EF, BC, cum eisdem habeant terminos, congruent, & proinde aequales sunt. b 14. ex. ~~et~~ Quare triangula BAC, EDF; & anguli B, E; itemque anguli C, F etiam congruunt, & aquantur. Quod erat Demonstrandum.

PROP. V.



Isoscelium triangulorum ABC qui ad basim sunt anguli ABC, ACB inter se sunt aequales. Et productis aequalibus rectis lineis AB, AC qui sub base sunt anguli CBD, BCE inter se aequales erunt.

Accipe AF = AD, & junges CD, ac BF.

Quoniam in triangulis ACD, ABF, sunt $AB = AC$, & $AF = AD$, angulusque A communis, erit ang. $ABF = ACD$, & ang. $AFB = ADC$, & bas. $BF = DC$; item $FC = DB$. ergo in triangulis BFC, BDC erit ang. $FCE = DBC$. Q. E. D. Item ideo ang. $FBC = DCB$. atqui ang. $ABF = ACD$. ergo ang. $ABC = ACB$. Q. E. D.

Corollarium.

Hinc, Omne triangulum aequilaterum est quocque aequiangulum.

PROP.

公元1655年巴罗(I. Barrow)拉丁文译本
《几何原本》的一页,卷I命题5“驴桥”。

第七卷有求两个或两个以上整数的最大公约数(现在称为欧几里得算法),第八卷大部分讲连比和有关的几何级数。

许多定义和定理,特别是关于比例的那些,几乎又重复了第五卷中的内容。因此数学史家考虑到为什么欧几里得要这样做?但至今仍没有找到一致的答案。

第十卷共有 115 个命题,它是全书最长也是最艰深的一卷,主要讨论无理量,但只涉及相当于 $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 之类的无理量。

《几何原本》的最后三卷论及立体几何及穷竭法

第十一卷包含了 39 个命题,一开始就给出了立体几何的 28 个定义,例如立体、直线与平面的垂直、两平面的垂直、平面与平面的夹角、二面角的平面角、平行平面以及把球、圆柱、圆锥定义为从平面图形绕一轴旋转而得出的但也有许多定义含糊其词。然后讨论空间直线与平面的各种关系。

第 12 卷共有 18 个命题,主要研究面积和体积的定理,这卷的主要思想是穷竭法。例如证明“两圆面积之比等于其直径平方之比”,就以圆内接正多边形愈益密切地接近两圆,因定理对正多边形成立,从而证明了它对圆也成立。

第 13 卷也有 18 个命题,着重研究五种正多面体。

公元 1794 年法国数学家勒让德(Legendre, 1752~1833 年)为了使《几何原本》更易于学生的“学”和教师的“教”,就着《几何原本》中的几何部分作了较大的修改,编成了《新欧几里得几何原本》简称为《新几何原本》。其主要特点是:

(1) 把《几何原本》中的非几何部分删去,并将几何部分重新整理和编写。并把“命题”中的定理和问题加以明确的区分。

(2) 加入了非负实数轴,从而把以数表量的内容纳入了几何。

(3) 把《几何原本》中的比例部分,改用了今日课本中的处理办法。

(4) 把《几何原本》中的第五公设,换成与它等价的平行公理:过直线外一点,有而且只有一条直线,与原直线平行。

于是从 19 世纪开始,初等几何课本的编写,一般都不是以《几何原本》、而是以《新几何原本》为蓝本的改编本。因而勒让德对几何、几何教育的发展是有贡献的。

第六节 《九章算术》

与希腊数学的发展同步,中国数学也有了长足的进步。一系列的数学思想和著作开始流传,到了西汉时代的《九章算术》,标志着中国数学已逐渐形成体系。

流传至今的最早的数学思想,当推墨经中的几何学与逻辑学的叙述。《庄子》中的“一尺之捶,日取其半,万世不竭”,蕴涵了无限的数学思想。到公元前两百年,已有数学著作流传。1984 年在湖北江陵张家山出土的《算数书》竹简,总字数约 7000 余,有 60 余小标题,如“方田”,“税田”,“金价”,“合分”,“约分”,“少广”,“程禾”,“贾盐”等等,涉及面积计算、开方、分数运算等。由于全部竹简尚未公开,其内涵有待进一步研究,与《算数书》几乎同时的还有《周髀算经》,涉及天文学上的分数运算、比例、等差级数等问题,而以勾股定理的论述最为重要。此后还有《淮南子》,《三统历》、《许商算术》、《杜忠算术》等著作,涉及数学问题。而集大成的,就是《九章算术》,就其内容和标题来分析,它是《算数书》的继续与发展。

现传本《九章算术》成书于何时,目前众说纷纭,多数认为在西汉末到东汉初之间,约公元一世纪前后,《九章算术》的内容十分丰富,全书采用问题集的形式,收有 246 个与生产、生活实践有联系的应用问题,其中每道题有问(题目)、答(答案)、术(解题的步骤,但没有证明),有的是一题一术,有的是多题一术或一题多术。这些问题依照性质和解法分别隶属于方田、粟米、衰(音崔 cuī)分、少广、商功、均输、盈不足、方程及勾股九章如下表所示。原作有插图,今传本已只剩下正文了。

《九章算术》的作者不详。很可能是在成书前一段历史时期内通过多人之手逐次整理、修改、补充而成的集体创作结晶。由于二千年来经过辗转手抄、刻印,难免会出现差错和遗漏,加上《九章算术》文字简略有些内容不易理解,因此历史上有过多次校正和注释,其中重要的有:

《九章算术》主要内容

章名	题数	术数	主 要 内 容
一、方田	38	21	各种面积计算公式与分数运算问题
二、粟米	46	33	各种比例问题
三、衰分	20	22	比例配分问题
四、少广	24	16	开平方、开立方等计算问题
五、商功	28	24	体积的计算问题
六、均输	28	28	与运输、纳税有关的加权比例等问题
七、盈不足	20	17	盈亏问题的解法与比例问题
八、方程	18	19	线性方程组的应用问题
九、勾股	24	22	勾股定理及其应用问题
共 计	246	202	

三国时曹魏刘徽注,唐朝李淳风注,南宋杨辉著《详解九章算法》选用《九章算术》中 80 道典型的题作过详解并分类,清李潢(? ~1811 年)所著《九章算术细草图说》对《九章算术》进行了校订、列算草、补插图、加说明,尤其是图文并茂之作。现代钱宝琮(1892~1974 年)曾对包括《九章算术》在内的《算经十书》进行了校点,用通俗语言、近代数学术语对《九章算术》及刘、李注文详加注释。80 年代以来,今人白尚恕、郭书春、李继闵等都有校注本出版。

现将《九章算术》的主要内容,按算术、代数和几何三部分概要介绍如下:

一、《九章算术》中的算术部分

1. 分数

《九章算术》中有比较完整的分数计算方法,包括四则运算,通分、约分、化带分数为假分数(我国古代称为通分内子,“内”读为纳)等等。其步骤与方法大体与现代的雷同。

分数加减运算,《九章算术》已明确提出先通分,使两分数的分母相同,然后进行加减。加法的步骤是“母互乘子,并以为实,母相乘为法,实如法而一”。这里“实”是分子。“法”是分母,“实如法而一”也就是用法去除实,进行除法运算,《九章算术》还注意到两点:其一是运算结果如出现“不满法者,以法命之”。就是分子小于分母时便以分数形式保留。其二是“其母同者,直相从之”,就是分母相同的分数进行加减,运算时不必通分,使分子直接加减即可。

关于分数乘法,《九章算术》中提出的步骤是“母相乘为法,子相乘为实,实如法而一”。

《九章算术》对分数除法虽然没有提出一般法则,但算法

也很清楚。如第一章方田章的第 18 个题“有三人三分人之一（即 $3\frac{1}{3}$ ），分六钱三分钱之一（即 $6\frac{1}{3}$ ），四分钱之三（即 $\frac{3}{4}$ ）。问人得几何”。“答曰：人得二钱八分钱之一”（即每人得 $2\frac{1}{8}$ 钱）。“经分（分数除法称经分）术曰：以人数为法，钱数为实，实如法而一”。即： $(6\frac{1}{3} + \frac{3}{4}) \div 3\frac{1}{3}$ 。自然在计算过程中首先需要把带分数化为假分数。然后分数相除，即相当于现在所说的“颠倒相乘”。

2. 最大公约数与最小公倍数

《九章算术》中还有求最大公约数和约分的方法。求最大公约数的方法称为“更相减损”法，其具体步骤是“可半者半之，不可半者，副置分母子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。”这里所说的“等数”就是我们现在的最大公约数。可半者是指分子分母都是偶数，可以折半的先把它折半，即可先约去 2。不都是偶数了，则另外摆（即副置）分子分母算筹进行计算，从大数中减去小数，辗转相减，减到余数和减数相等，即得等数。

如方田章第六题：“又有九十一分之四十九，问约之得几何”。将更相减损这一运算写成现代的图式就是

91	49
<u> -49 </u>	<u> -42 </u>
42	7
<u> -5×7 </u>	
7	

于是 7 就是所求得等数，再以它约 $\frac{49}{91}$ 得简约分数 $\frac{7}{13}$ ，更相减损法实质上是辗转相减法。辗转相减法与欧几里得的

辗转相除法在步骤上虽然略有不同,但在理论上却是一致的。

《九章算术》在分数的加减运算中,已知用最小公倍数作公分母,例如少广章第六题相当于分数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \\ = \frac{420 + 210 + 140 + 105 + 84 + 70 + 60}{420} = \frac{1089}{420}$$

的运算,这个公分母 420 正是 1,2,3,4,5,6,7 的最小公倍数。

3. 比例算法

在《九章算术》的第二、三、六等章内,广泛地使用了各种比例解应用问题。粟米章的开始就列举了各种粮食间互换的

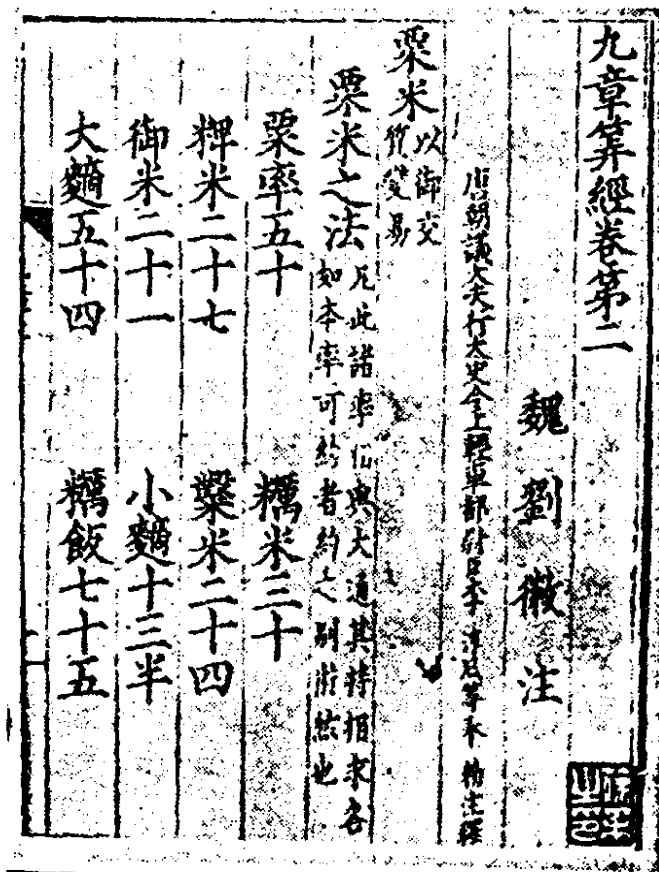


图 1-23 宋本《九章算术》

(现藏于上海图书馆)

比率如下：“粟米之法：粟率五十，粳米三十，粳米二十七，粳米二十四，……”(图 1-23)这是说：谷子五斗去皮可得糙米三斗，又可舂得九折米二斗七升，或八折米二斗四升，……。

例如，粟米章第一题：“今有粟米一斗，欲为粳米，问得几何”。它的解法是：“以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一”。用现代的方式来表达，即为公式：

$$\text{所求数} = \frac{\text{所有数} \times \text{所求率}}{\text{所有率}}$$

或所求数：所有数 = 所求率：所有率。

这个题是欲将粟米换成粳米，其中“粟米一斗(十升)”是“所有数”，粳米数即为“所求数”，按规定“粟率五十”为“所有率”，粳米 30 为“所求率”。于是得所求数为 $10 \times 30 \div 50 = 6$ (升)，这就是说一斗谷子可以舂得六升糙米。因而可以根据物与物的比率，再由今有数(所有数)即可求得未知数据(所求数)，因为这类应用问题大都依据“今有”的数据，问所求的数，因此我国古代数学家刘徽就用“今有术”作为这类比例问题解法的专用名词。

在《九章算术》中，今有术应用特别广泛，是一种普遍的解题方法。与比率有关的其他一些算法一般都是在今有术的基础上演化而来的。

《九章算术》中另一个常用的比率算法是衰分术，所谓“衰分”就是差分。比例分配的意思，它是古代处理配分问题的一般方法，“衰分术曰，各置列衰(即所配的比率)，副并(得所配比率的和)为法，以所分乘未并者各自为实，实如法而一”，刘徽“注”说：“列衰各为所求率，副并(所得的和)为所有率，所分为所有数”，用“今有术”计算，就可以得到各所求数。例如衰分

章第二题：“今有牛、马、羊食人苗，苗主责之粟五斗，羊主曰，我羊食半马（所食），马主曰，我马食半牛（所食），今欲衷偿之，问各几何”，依照羊主人、马主人的话，牛、马、羊所食粟相互之比是 4 : 2 : 1，就用 4、2、1 各为所求率， $4+2+1=7$ 为所有率，粟 50 升为所有数。以“今有术”演算分别得牛主人应偿 $50 \times \frac{4}{7} = 28 \frac{4}{7}$ （升），马主人应偿 $14 \frac{2}{7}$ 升，羊主人应偿 $7 \frac{1}{7}$ 升。

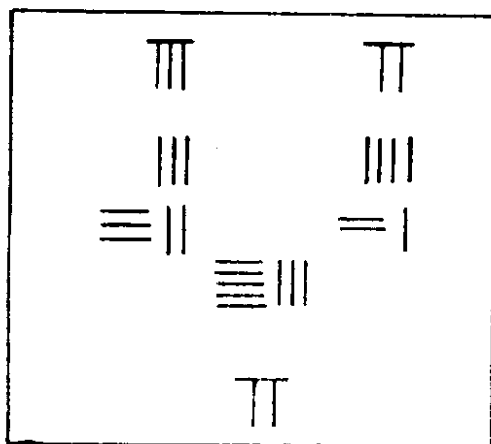
《九章算术》中有相当复杂的比例问题，例如均输章中，既有按正比“列衰”也有按反比“列衰”的比例分配问题等等。因此《九章算术》已包括了现代算术中的全部比例的内容，形成了一个完整的体系。

印度于五、六世纪间有“三率法”的算法。所谓三率法相当于 $\frac{a(\text{所有率})}{b(\text{所求率})} = \frac{c(\text{所有数})}{d(\text{所求数})}$ 的比例式。因此三率法实质上就是我们的今有术。印度三率法传入阿拉伯国家，再传到西欧各国，于是欧洲在更晚的时期也有类似的算法，欧洲商人很重视这种算法，称它为“金法”。从《九章算术》的“今有术”逐渐演变到现在教科书中的比例，已有二千年的发展历史。

4. 盈亏问题

《九章算术》第七章“盈不足”专讲盈亏问题及其解法其中第一题：“今有（人）共买物，（每）人出八（钱），盈（余）三钱；人出七（钱），不足四（钱），问人数、物价各几何”，“答曰：七人，物价 53（钱）。”“盈不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下。令维乘（即交错相乘）所出率，并以为实，并盈，不足为法，实如法而一……置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数”。如以算筹演算大致如图 1-24 所示。

所出率
盈不足
维乘得
实
法



实 $=8\times 4+7\times 3=53$
法 $=4+3=7$
因 $8-7=1$
故物价为
 $53\div 1=53$ (钱)
人数为 $7\div 1=7$ (人)

图 1-24

用现代的符号来表示: 设每人出 a_1 钱, 盈 b_1 钱; 每人出 a_2 钱, 不足 b_2 钱, 求物价 u 和人数 v 。依据术文得下列二公式:

$$u = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1 - a_2}, \quad v = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}.$$

当然我们还可以算出每人应该分摊的钱数

$$t = \frac{u}{v} = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{b_1 + b_2}.$$

因此上述的盈不足术实际上包含着三个公式。

《九章算术》的盈不足章的最前四个问题是正规的盈亏问题。而第五题是“两盈”问题, 第六题是“两不足”问题则分子就得相减了, 都是“以少减多”来进行的, 第七题是“盈、适足”, 第八题是“不足, 适足”问题。它们的解法也可以在盈不足术的基础上分别提出适当的公式。

盈不足章的第 9 到第 20 题, 是一般的算术应用题, 有些问题还相当难, 初学者不易解答。如果通过两次假设(分别各假设一个答数)然后分别验算其盈余和不足的数量, 这样任何算术问题都可以改造成为一个盈亏问题来解。因此盈不足术

是中国数学史上解应用问题的一种别开生面的创造,它在我国古代算法中占有相当重要的地位。盈不足术还经过丝绸之路西传中亚阿拉伯国家,受到特别重视,被称为“契丹算法”,后来又传入欧洲,中世纪时期“双设法”曾长期统治了他们的数学王国。

二、《九章算术》中的代数部分

《九章算术》中的代数内容同样很丰富,具有当时世界的先进水平。

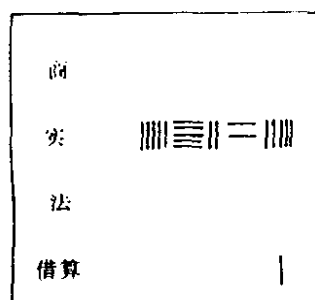
1. 开平方和开立方

《九章算术》中讲了开平方、开立方的方法,而且计算步骤和现在的基本一样。所不同的是古代用筹算进行演算,现以少广章第12题为例,说明古代开平方演算的步骤,“今有积五万五千二百二十五步。问为方几何”。“答曰:二百三十五步”。这里所说的步是我国古代的长度单位。

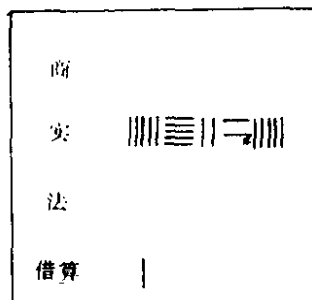
“开方(是指开平方,由正方形面积求其一边之长。)术曰:置积为实(即指筹算中把被开方数放置于第二行,称为实)借一算(指借用一算筹放置于最后一行,如图1-25(1)所示用以定位)。步之(指所借的算筹一步一步移动)超一等(指所借的算筹由个位越过十位移至百位或由百位越过千位移至万位等等,这与现代笔算开平方中分节相当如图1-25(2)所示)。议所得(指议得初商,由于实的万位数字是5,而且 $2^2 < 5 < 3^2$,议得初商为2,而借算在万位,因此应在第一行置初商2于百位,如图1-25(3)所示)。以一乘所借一算为法(指以初商2乘所借算一次为20000,置于“实”下为“法”,如图1-25(4)所示)而以除(指以初商2乘“法”20000得40000,由“实”减去得: $55225 - 40000 = 15225$,如图1-25(5)所示)除已,倍法为定

法,其复除,折法而下(指将“法”加倍,向右移一位,得 4000 为“定法”因为现在要求平方根的十位数字,需要把“借算”移至百位,如图 1-25(6)所示)。复置借算步之如初,以复议一乘之,所得副,以加定法,以除(这一段是指:要求平方根的十位数字,需置借算于百位。因“实”的千位数字为 15,且 $4 \times 3 < 15 < 4 \times 4$,于是再议得次商为 3。置 3 于商的十位。以次商 3 乘借算得 $3 \times 100 = 300$,与定法相加为 $4000 + 300 = 4300$ 。再乘以次商,则得: $3 \times 4300 = 12900$,由“实”减去得: $15225 - 12900 = 2325$ 。如图 1-25(7)所示,以所得副从定法,复除折下如前(这一段是指演算如前,即再以 $300 \times 1 + 4300 = 4600$ 向右移一位,得 460,是第三位方根的定法,再把借算移到个位,如图 1-25(8)所示;又议得三商应为 5,再置 5 于商的个位如图 1-25(9)所示,以 $5 + 460 = 465$,再乘以三商 5,得 $465 \times 5 = 2325$ 经计算恰尽如图 1-25(10)所示,因此得平方根为 235。)

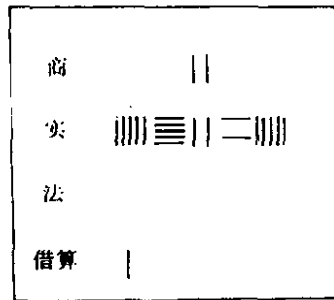
上述由图 1-25(1)~(10)是按算筹进行演算的,看起来似乎很繁琐,实际上步骤十分清楚,易于操作。它的开平方原理与现代开平方原理相同。其中“借算”的右移、左移在现代的观点下可以理解为一次变换和代换。《九章算术》时代并没有理解到变换和代换,但是这对以后宋、元时期高次方程的解法是有深远影响的。至于开立方,因篇幅的关系这里从略。



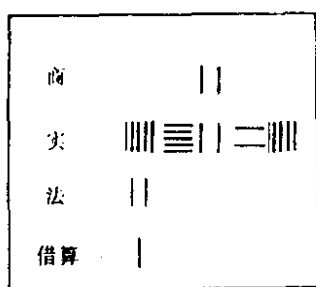
(1)



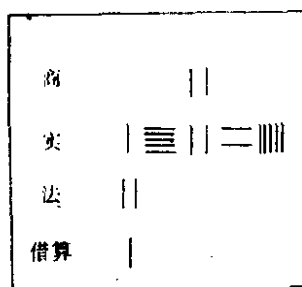
(2)



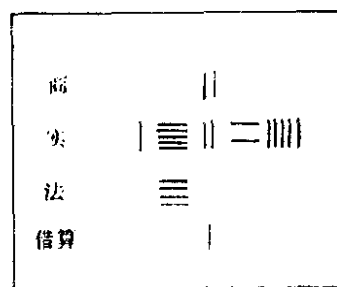
(3)



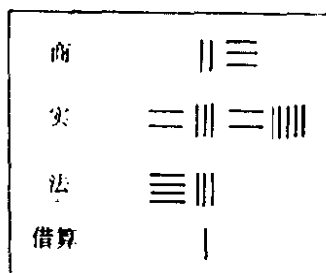
(4)



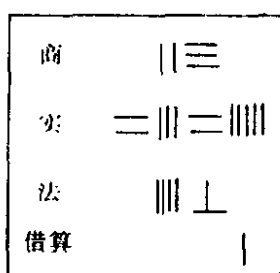
(5)



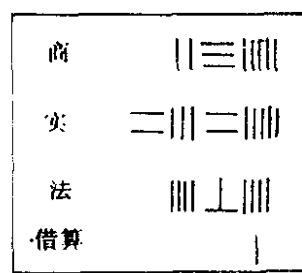
(6)



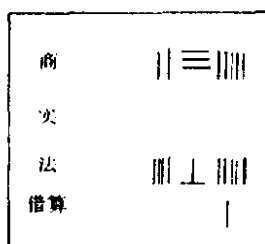
(7)



(8)



(9)



(10)

图 1-25

2. 二次方程问题

《九章算术》勾股章第二十题：“今有邑方不知大小，各中开门，出北门二十步有木，出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木，问邑方几何。”“答曰：二百五十步”。

已知：如图 1-26 所示， $CD = 20$ 步， $EB = 14$ 步， $BF = 1775$ 步，求 CE 。

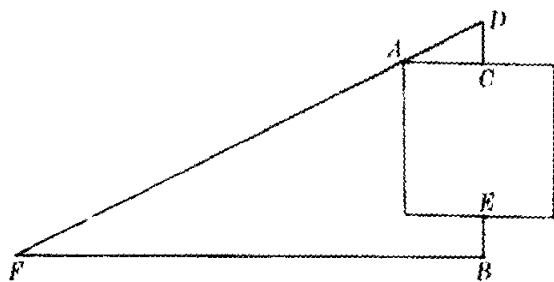


图 1-26

按题意,得

$$CD \cdot BF = CA \cdot BD = \frac{1}{2} EC(CD + CE + EB),$$

$$\text{或} \quad EC(CE + CD + EB) = 2CD \cdot BF.$$

设 $x = EC$ 。

经整理,得 $x^2 + 34x = 71000$ 。

这是一个解数字二次方程的问题。这种二次方程有一个正系数的一次项在二次项后面,我国古代称这个一次项为“从法”。《九章算术》少广章开平方术虽然专为开整平方而建立,但是也可以利用来解一般的二次方程问题。解这种二次方程只需开带“从法”的平方,或简称为“开带从平方”。从而即可求得方程的正根。因此上述勾股章第 20 题的解法为:“术曰以出北门步数乘西行步数倍之, $(2CD \cdot BF = 2 \times 20 \times 1775 = 71000)$ 为实,并出南门步数为从法 $(20 + 14 = 34)$,开方除之,即邑方。”现列出开带从平方的筹算步骤如图 1-27 所示。(注:为了不易搞错,空位补上 0)

如果我们将上述开带从平方的演算过程与 55225 的开平方的演算过程作一比较的话,我们就可以发现:在 55225 开平方过程中,议平方根的第二位和第三位数字时,所列的算式是

一个有“从法”的开方式相当于我们分别用开带从平方的方法解二次方程：

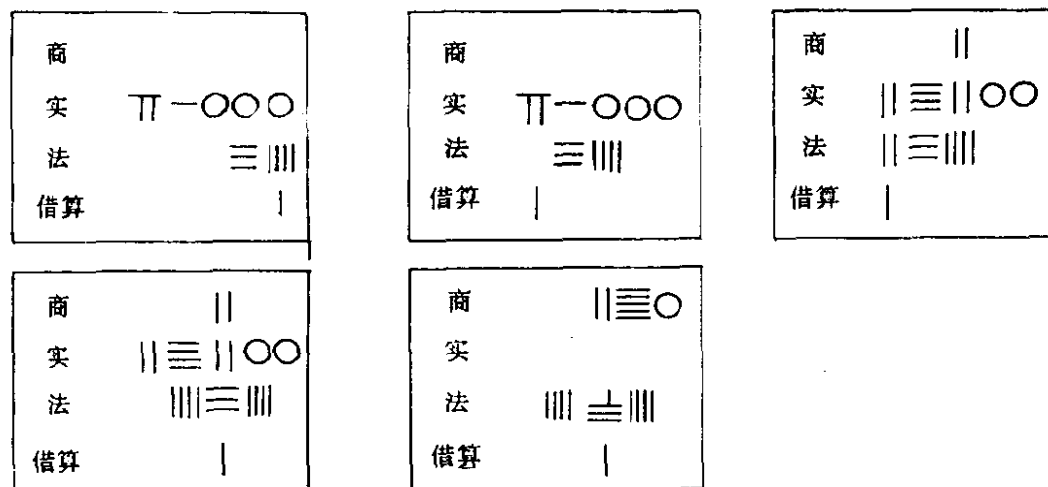


图 1-27

$$100x_2^2 + 4000x_2 = 15225, \quad (\text{参阅图 1-25(6)})$$

以及 $x_3^2 + 460x_3 = 2325$. (参阅图 1-25(8))

不过要注意的是前者的正根是 $10x_2 = 35$, 而后者的正根是 $x_3 = 5$.

3. 多元一次方程组及其解法

《九章算术》方程章中所谓“方程”是专指多元一次方程组而言,与现在“方程”的含义并不相同。《九章算术》中多元一次方程组的解法,是将它们的系数和常数项用算筹摆成“方阵”(所以称之为“方程”)。消元的过程相当于现代大学课程高等代数中的线性变换。

方程章第一题:“今有上禾(指上等稻子)三秉(指捆)中禾二秉,下禾一秉,实(指谷子)三十九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗;上禾一秉,中禾二秉,下禾三秉,实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何”,这一题若按现代的记

法。设 x, y, z 依次为上、中、下禾各一秉的谷子数, 则上述问题是求解三元一次方程组:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 39, & (1) \\ 2x + 3y + z = 34, & (2) \\ x + 2y + 3z = 26, & (3) \end{cases}$$

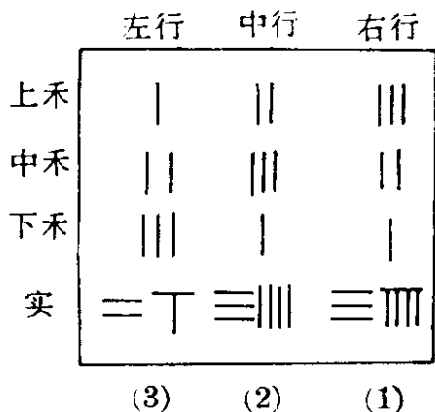
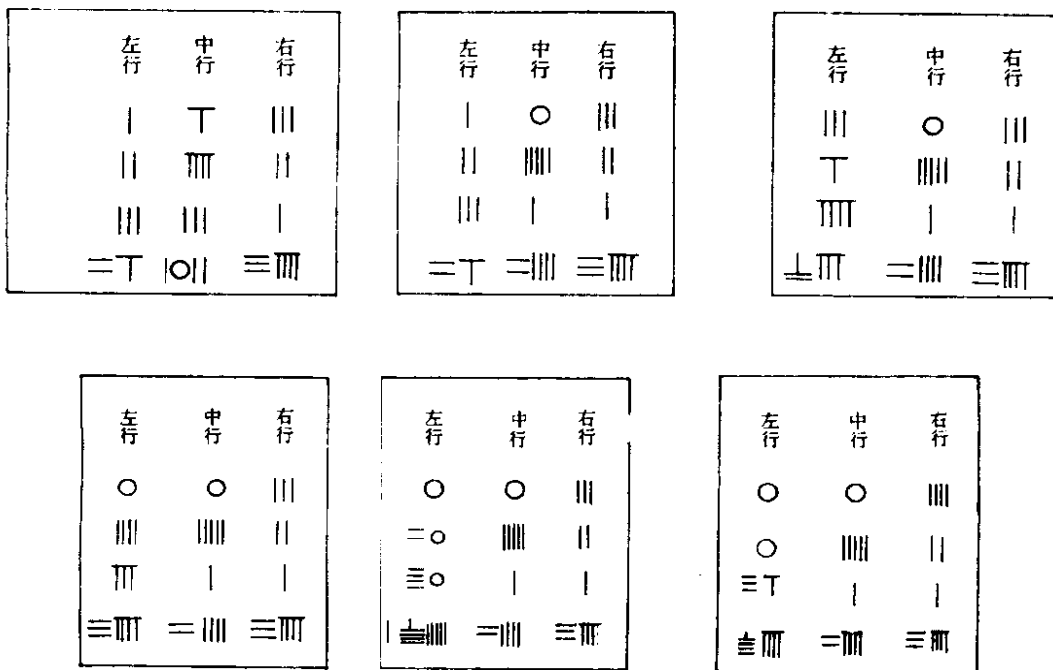


图 1-28

《九章算术》用算筹演算: “方程术曰, 置上禾三秉, 中禾二秉, 下禾一秉, 实三十九斗, 于右方。中、左行列如右方(图 1-28)以右行上禾徧乘(即遍乘)中行而以直除(这里“除”是减, “直除”即连续相减。)……(引文下略)”。

现将遍乘直除法解方程组的过程, 按算筹演算如图 1-29 所示:



左行	中行	右行
○	○	
○		
-	=	≡

左行	中行	右行
○	○	
○		○
	○	○
-	-	≡

图 1-29

这题的答案《九章算术》方程章第一题“答曰：上禾一秉，九斗四分斗之一($9\frac{1}{4}$ 斗)；中禾一秉，四斗四分斗之一($4\frac{1}{4}$ 斗)；下禾一秉，二斗四分斗之三($2\frac{3}{4}$ 斗)”。

《九章算术》方程章中共计 18 个题，其中二元的 8 题，三元的 6 题，四元、五元的各 2 题都用上述的演算法解决，直除法是我国古代解方程组的最早的方法。

多元一次方程组解法在印度最早出现于第七世纪(约 628 年)在欧洲最早提出三元一次方程组和解法的是 16 世纪中(1559 年)的法国数学家布丢(Buteo)。至于线性方程组的一般理论直到 18 世纪(1779 年)才由法国数学家别朱(E. Bezout)建立。可见《九章算术》中的方程术，不但是中国古代数学中的伟大成就，在世界数学史上，也是一份值得我们自豪的宝贵遗产。

4. 正负数

由于《九章算术》在用直除法解一次方程组过程中，不可避免地要出现正负数的问题，于是在方程章第三题中明确提出了正负术。刘徽在该术的注文里实质上给出了正、负数的定义：“两算得失相反，要令‘正’、‘负’以名之”。并在计算工具即算筹上加以区别“正算赤，负算黑，否则以邪正为异”。这就是规定正数用红色算筹，负数用黑色算筹。如果只有同色算筹的

话,则遇到正数将筹正放,负数时邪(同斜)放。宋代以后出现笔算也相应地用红、黑色数码字以区别正、负数,或在个位数上记斜划以表示负数,如一Ⅲ=𠂔(即-1824),后来这种包括负数写法在内的中国数码字还传到日本。

关于正、负数的加减运算法则,“正负术曰:同名相除,异名相益,正无入负之,负无入正之。其异名相除,同名相益,正无入正之,负无入负之”。这里所说的“同名”、“异名”分别相当于现在所说的同号、异号。“相益”、“相除”是指二数相加、相减。术文前四句是减法运算法则:

(1) 如果被减数绝对值大于减数绝对值,即 $a > b \geq 0$,

则同名相除: $(\pm a) - (\pm b) = \pm(a - b)$,

异名相益: $(\pm a) - (\mp b) = \pm(a + b)$ 。

(2) 如果被减数绝对值小于减数绝对值,即 $b > a \geq 0$ 。

① 如果两数皆正

则 $a - b = a - [a + (b - a)] = -(b - a)$ 。

中间一式的 a 和 a 对消,而 $(b - a)$ 无可对消,则改“正”为“负”,即“正无入负之”。“无入”就是无对,也就是无可对消(或不够减或对方为零)。

② 如果两数皆负

则 $(-a) - (-b) = -a - [(-a) - (b - a)] = +(b - a)$ 。

在中间的式子里 $(-a)$ 和 $(-a)$ 对消,而 $-(b - a)$ 无可对消,则改“负”为“正”所以说“负无入正之”。

③ 如果两数一正一负。则仍同(1)的异名相益。

术文的后四句是指正负数加法运算法则。

(1) 同号两数相加,即同名相益,其和的绝对值等于两数绝对值和。

如果 $a > 0, b > 0$,

则 $a+b=a+b, (-a)+(-b)=-(a+b)$

(2) 异号两数相加, 实为相减, 即异名相除。如果正数的绝对值较大, 其和为正, 即“正无入正之”。如果负数的绝对值较大, 其和为负, 即“负无入负之”。用符号表示为

① 如果 $a>b\geq 0$,

则 $a+(-b)=[b+(a-b)]+(-b)=a-b$,

或 $(-a)+b=[(-b)-(a-b)]+b=-(a-b)$ 。

② 如果 $b>a\geq 0$,

则 $a+(-b)=a+[(-a)-(b-a)]=-(b-a)$,

或 $(-a)+b=(-a)+[a+(b-a)]=b-a$ 。

关于正负数的乘除法, 在《九章算术》时代或许会遇到有关正负数的乘除运算。可惜书中并未论及, 直到元代朱世杰于《算学启蒙》(1299 年) 中才有明确的记载: “同名相乘为正, 异名相乘为负”, “同名相除所得为正, 异名相除所得为负”, 因此至迟于 13 世纪末我国对有理数四则运算法则已经全面作了总结。至于正负数概念的引入, 正负数加减运算法则的形成的历史记录, 我国更是遥遥领先。国外首先承认负数的是七世纪印度数学家婆罗门笈多(约 598—?) 欧洲到 16 世纪才承认负数。

三、《九章算术》中的几何部分

《九章算术》总结了生产、生活实践中大量的几何知识, 在方田、商功和勾股章中提出了很多面积、体积的计算公式和勾股定理的应用, 现分别介绍如下

1. 面积计算

《九章算术》方田章主要论述平面图形直线形和圆的面积计算方法。

《九章算术》方田章第一题“今有田广十五步，从(音纵 zong)十六步。问为田几何。”“答曰：一亩”。这里“广”就是宽，“从”即纵，指其长度，“方田术曰：广从步数相乘得积步，(得积步就是得到乘积的平方步数)以亩法二百四十步(实质应为积步)除之，即亩数。百亩为一顷。”当时称长方形为方田或直田。称三角形为圭田，面积公式为“术曰：半广以乘正从”。这里广是指三角形的底边，正从是指底边上的高，刘徽在注文中对这一计算公式实质上作了证明：“半广者，以盈补虚，为直田也。”“亦可以半正从以乘广”(图 1-30)。盈是多余，虚乃不足。“以盈补虚”就是以多余部分填补不足的部分，这就是我国古代数学推导平面图形面积公式所用的传统的“出入相补”的方法，由上图“以盈补虚”变圭田为与之等积的直田，于是得到了圭田的面积计算公式。

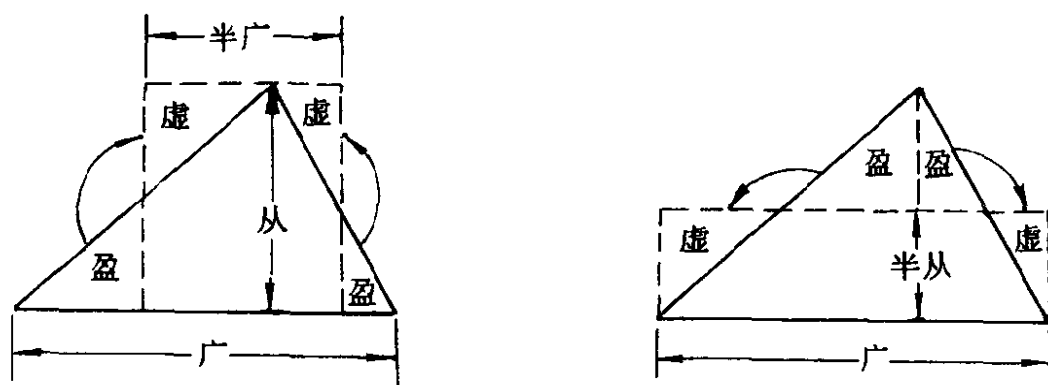


图 1-30

方田章第二十七、二十八题把直角梯形称为“邪田”(即斜田)它的面积公式是：“术曰：并两邪(即两斜，应理解为梯形两底)而半之，以乘正从……，又可半正从……以乘并。”刘徽在注中说明他的证法仍是“出入相

补”法。在方田章第二十九、三十题把一般梯形称为“箕田”，上、下底分别称为“舌”、“踵”，面积公式是：“术曰：并踵舌而半之，以乘正从”。

至于圆面积，在《九章算术》方田章第三十一、三十二题中，它的面积计算公式为：“半周半径相乘得积步”。这里“周”是圆周长，“径”是指直径。这个圆面积计算公式是正确的。只是当时取径一周三（即 $\pi \approx 3$ ）。于是由此计算所得的圆面积就不够精密。

除了上述面积计算公式以外，《九章算术》中还有近似计算公式，方田章第三十六题中有弧田（指现在的弓形）面积计算公式：“术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一”（图 1-31）。用现代的记号表示即 $S_{\text{弓}} = \frac{1}{2}(bh + h^2)$ 。这是一个经验公式，所得近似值不很精密。综上所述，可以认为《九章算术》时代关于常见的平面图形（直线形与圆）面积计算已经大都可以转化为运用上述公式来进行计算了。

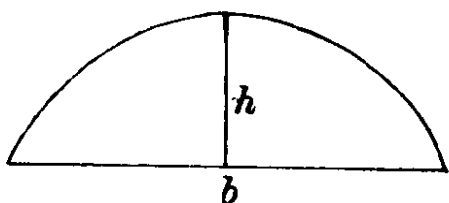


图 1-31

2. 体积计算

《九章算术》商功章收集的都是一些有关体积计算的问题。但是商功章并没有论述长方体或正方体的体积算法。看来《九章算术》是在长方体或正方体体积计算公式： $V = abh$ 的基础上来计算其他立体图形体积的。

《九章算术》商功章提到城、垣、堤、沟、堑、渠，因其功用不同因而名称各异，其实质都是正截面为等腰梯形的直棱柱，他们的体积计算方法：“术曰：并上、下广而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺”。这里上、下广指横截面的上、下底（ a, b ）

高或深(h),袤是指城垣……的长(l)。因此城、垣…的体积计算术公式

$$V = \frac{1}{2}(a+b)hl.$$

刘徽在注释中把对于平面图形的出入相补原理推广应用到空间图形,成为“损广补狭”以证明几何体体积公式。

刘徽还用棋验法来推导比较复杂的几何体体积计算公式。所谓棋验法,“棋”是指某些几何体模型即用几何体模型验证的方法,例如长方体本身就是“棋”[图 1-32(1)]斜解一个长方体,得两个两底面为直角三角形的直三棱柱,我国古代称为“堑堵”[图 1-32(2)],所以堑堵的体积是长方体体积的二分之一。

$$V_{\text{堑堵}} = \frac{1}{2}abh。$$

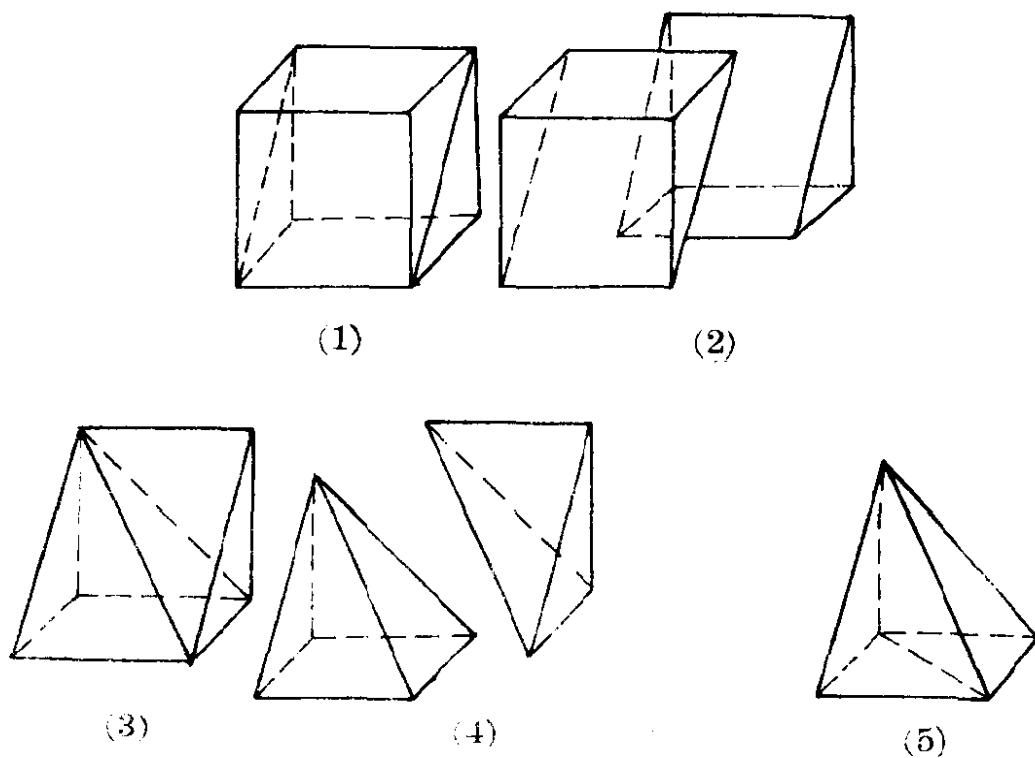


图 1-32

再解开右后边的堑堵[图 1-32(3)]。得一个底面为长方形而有一棱和底面垂直的四棱锥(古代称之为“阳马”)和一个底面为直角三角形而有一棱和底面垂直的三棱锥(古代称之为“鳖臑”(臑音闹))[图 1-32(4)]这个阳马又可以对分为两个“鳖臑”[图 1-32(5)],如果原长方体为正方体的话,则极容易看出:由一个堑堵分解出来的三个鳖臑是等积的。刘徽可以证明在长方体的情况下,由一个堑堵分解出来的三个鳖臑仍然是等积的。于是阳马体积应是长方体体积的三分之一。

$$V_{\text{阳马}} = \frac{1}{3}abh. \quad V_{\text{鳖臑}} = \frac{1}{6}abh.$$

这样我们可以把正四棱锥(古代称为“方锥”)分解为四个阳马,因此方锥体积为

$$V_{\text{方锥}} = \frac{1}{3}a^2h.$$

正四棱台(古代称为“方亭”)可分解为一个正四棱柱,四个堑堵和四个阳马,因此

$$V_{\text{方亭}} = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab)h.$$

《九章算术》商功章还有圆锥、圆台(古代称“圆亭”)的体积计算公式。甚至对三个侧面是等腰梯形,其他两面为勾股形的五面体(古代称“羡除”)[图 1-33(1)],上、下底为矩形的拟

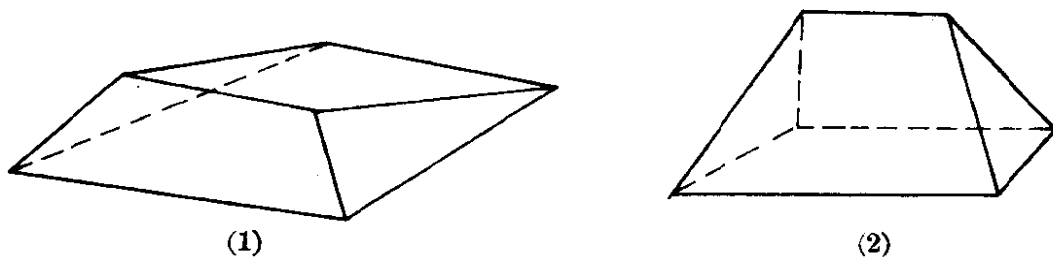


图 1-33

柱体(古代称“刍童”)以及上底为一线段,下底为一矩形的拟柱体(古代称“刍甍”)(甍音梦)[图 1-33(2)]等都可以计算其体积。

3. 勾股定理及其应用

《九章算术》以前虽然已经有了勾股定理,但主要是在天文方面的应用。在《九章算术》中已经用得很广,而且在勾股章一开始就先讲了勾股定理及其变形,前三个题的“勾股术曰:勾股各自乘,并而开方除之,即弦。又股自乘,以减弦自乘,其余开方除之,即勾。又勾自乘,以减弦自乘,其余开方除之,即股”。

如果以 a 、 b 、 c 各表示直角三角形的勾、股、弦。则上述三句话即相当于:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

因此,勾股术可以理解为已知直角三角形两边推求第三边的方法。

刘徽在注文中,曾对勾股定理用出入相补原理来论证这一定理,可惜所绘的弦图早已散失,没有能够和注文一起留传下来。

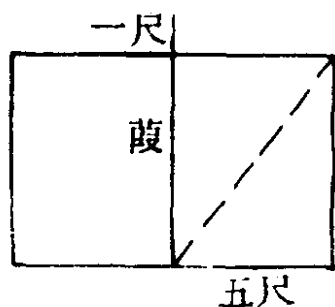


图 1-34

《九章算术》勾股章除了勾股定理及其变形的三个题以及涉及勾股容方、容圆各一题以外,其余十九个题全是应用问题。

例如勾股章第六题“今有池方一丈,葭(音 jia, 一种芦苇类植物)生其中央,出水一尺。引葭赴岸,适与岸齐。问水深,葭长各几何。”

“答曰：水深一丈二尺；葭长一丈三尺。”

术曰：半池方自乘，以出水一尺自乘，减之，余，倍出水除之，即得水深、加出水数，得葭长”。

如图 1-34 所示，设池方为 $2a$ ，水深为 b ，葭长为 c ，

$$\text{则按术得 水深 } b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)} = \frac{5^2 - 1}{2} = 12,$$

$$\text{葭长 } c = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)} + (c-b) = 13.$$

现代解法：设水深为 x 尺，则葭长为 $x+1$ ，

按题意由勾股定理，得 $5^2 + x^2 = (x+1)^2$ 。

整理，得 $2x = 5^2 - 1^2$ ， $\therefore x = 12$ 。

两种解法相比较，可见实质解法步骤完全一致。

印度古代有著名的“莲花问题”，其中除了只有数据与《九章算术》的“葭生中央问题”不同以外，其余完全相同。但要比中国《九章算术》晚了一千多年。

我国古代数学巨著《九章算术》流传至今已达两千余年之久，不仅指导着我国数学的发展，而且早已流传到世界各地，翻译成日、英、俄、德等多种文字，对世界数学的发展也有不可估量的巨大贡献和影响。把《九章算术》与西方最早的一本数学名著欧几里得的《几何原本》相对照，就可以发现从形式到内容都各有特色和所长，形成东、西方数学的不同风格。《几何原本》以形式逻辑方法把全部内容贯穿起来，而《九章算术》则按问题的性质和解法把全部内容分类编排。《几何原本》中极少提及应用问题，而《九章算术》则是解应用问题为主，《几何原本》以几何为主，略有一点算术内容，而《九章算术》则包含了算术、代数、几何等我国当时数学的全部内容。其中尤其是代数无可争辩地是中国所创。在 16 世纪以前基本上是中国一

手包办了的。因此,完全可以说《九章算术》与《几何原本》是世界数学史上东西辉映的两本不朽的传世名著。也是现代数学的两大主要源泉。

第七节 后希腊时期的数学

公元前四世纪马其顿帝国崛起,马其顿统治者亚历山大(Alexander),自幼师从亚里士多德,接受了希腊文化。从公元前 334 年起,亚历山大率兵大举东征。他足迹所到之处,兴建了一系列希腊式的城市,其中包括亚历山大里亚(今埃及的亚历山大港)。

公元前 323 年亚历山大大帝死后,他的帝国被其部下将领分割为三个独立的部分:欧洲部分为安提哥那帝国,亚洲部分为塞流卡斯帝国,埃及部分归希腊的托勒密王朝统治。虽然这三部分都受希腊文化的影响,但重要数学创造都集中在托勒密帝国的亚历山大里亚城。经过托勒密帝国诸王的经营,亚历山大里亚城成为当时整个地中海地区最大的城市,也是地中海地区与东方各国贸易和文化交流的中心,其规模远在古典希腊时期的雅典之上。城内建有蔚为壮观的供学者从事研究和教学的学术中心——亚历山大里亚图书馆和研究机构“艺神之宫”。图书馆内藏书达 75 万卷,几乎包括了所有古代希腊的著作和一部分东方典籍,在研究机构中第一次出现了用国家经费供养的研究人员。当时大多数优秀的希腊数学家都云集于此。世称为亚历山大里亚学派。

亚历山大的东征,客观上造成了希腊文化与东方文化的融合,产生了更高水平的希腊文化,数学也在这里找到了新的生长点。这个时期的数学发展主要有两个方向:一部分数学家

继续沿着毕达哥拉斯和柏拉图学派的方向前进,致力于研究、整理纯粹数学的理论,使之形成体系,其代表人物是欧几里得和阿波罗尼(Apollonius,约公元前 262~190 年),另一部分数学家则积极参与天文学、地理学、力学、光学等方面的研究,他们不仅使古典时期的优秀成果得到发扬,而且还开拓了新的领域。其代表人物是阿基米德(Archimedes,约公元前 287~212 年)。人们把他和欧几里得、阿波罗尼并列为亚历山大里亚时期的三大数学巨人。关于欧几里得和它的《几何原本》已在本章第五节述及,阿波罗尼生于小亚细亚西北部的拍加,他青年时代去亚历山大城,在欧几里得的学生那里学习数学。他的主要著作是《圆锥曲线》。阿基米德是一位天文学家的儿子,生于西西里岛的叙拉古,他青年时代在亚历山大里亚受教育,以后他回到叙拉古,并一直生活在那里,但他始终与亚历山大里亚保持着联系。

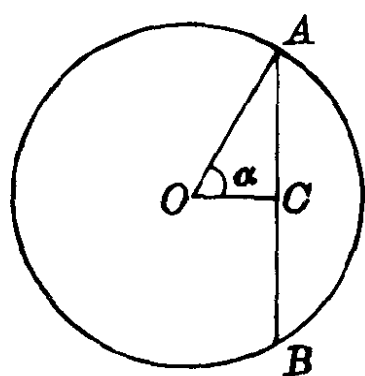
一、三角学与托勒密

由于人们想建立定量的天文学,为修订历法、航海和研究地理服务,一门新的学科——三角学产生了。创立这门学科的学者主要是希帕克斯(Hipparchus,约公元前 190~125 年),梅内劳斯(Menelaus,约公元 98 年)和托勒密(Ptolemy,约公元 90~168 年,他不属于托勒密王族)

希帕克斯曾在罗德斯岛上的著名的天文台上进行观察,编制过包括一千多颗恒星的星表。他在天体测量学上的业绩与他对三角学的贡献紧密联系在一起。他的许多重要著作已经失传,只有少量研究成果,例如,从 0° ~ 180° 之间各角度的正弦表,被托勒密记录了下来。

希帕克斯把圆周 360 等分,把直径 120 等分,每一小份按

六十进位制往下再分。于是,若给定一弧为 360 份中的若干份,要求所对应的弦的长度数,就相当于后来的正弦函数。用现代的符号表示为(图 1-35)。



$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{AC}{OA} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2\alpha \text{ 所对弦})}{60} \\ &= \frac{1}{120}(2\alpha \text{ 所对弦}).\end{aligned}$$

图 1-35

约公元一世纪末住在亚历山大里亚的梅内劳斯写过一部重要著作《球面学》,这部著作在三角学的发展中起了重要作用。此书分为三篇,第一篇涉及球面三角形的定义,以及与平面三角形相类似的许多性质,如球面三角形两边之和大于第三边;若两球面三角形的三个角彼此对应相等,则这两球面三角形全等。

第二篇主要是讲天文学,只是间接地涉及球面几何。

第三篇一开始的命题是平面几何的梅内劳斯定理在球面几何上的推广,在平面的情况下,梅氏定理被古代数学家记为下列比例形式:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CF}{DF} \cdot \frac{BD}{AB}.$$

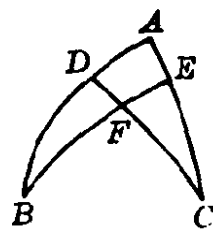
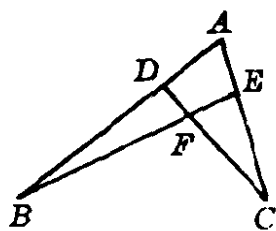


图 1-36

而在球面的情况下(图 1-36),上式中的线段则应当用弧的双倍弦,或者(按现代的符号)用弧的正弦(或球心处相应圆心角的正弦)来代替:

$$\frac{\sin CE}{\sin AE} = \frac{\sin CF}{\sin DF} \cdot \frac{\sin BD}{\sin AB}$$

托勒密(约 100~170)是古希腊天文学家、地理学家和数学家,长期在亚历山大进行天文观测。他继承和发展了希帕克斯和梅内劳斯在三角和天文方面的工作,完成了系统的三角学著作《数学汇编》,其中含有间隔为 $\frac{1}{2}$ 度,从 $\frac{1}{2}$ 度到 180 度的正弦表,并扼要解释了从一个含义丰富的几何命题来推导正弦表的方法。这个命题现在称为托勒密定理:在圆内接四边形中,两对角线之积等于两对对边乘积之和。由这个定理出发托勒密实质上已掌握了计算两角和、两角差、半角等的三角值。

二、代数学与丢番图

代数符号的使用是亚历山大时期代数学的重大进展。此前,欧几里得、阿基米德等曾经用字母表示过数、时间或距离等,但是他们都没有认识到字母表示法对代数发展的重大作用。

第一次系统地提出代数符号的是丢番图(Diophantus,约公元 246~330 年)生平不详。他是希腊化了的巴比伦人。主要理论著作《算术》是古代数学典籍之一,该书共十三篇,很可惜的是现在仅存前六篇。在这部《算术》中,丢番图摆脱了古典时期几何代数法的束缚,出现了代数转向算术运算的趋势,成为字母运算方式的开端。

丢番图给出了有理数和多项式的加、减、乘法运算法则,

其中规定：“消耗数乘以消耗数得到增添数，消耗数乘以增添数得到消耗数。”意思是“负数乘以负数得正数，负数乘以正数得负数”。然后，丢番图又把这些法则应用到解方程上，规定了移项法则和合并同类项法则，对于除法，他仍然象前人一样，用重复的减法来代替。

在亚历山大里亚时期，随着数学应用范围的扩大，出现了越来越多的与方程有关的代数问题。而丢番图就是当时解代数方程的大师，他的墓志铭就是一个妙趣横生的一元一次方程问题：“过路人！这里埋葬着丢番图，他的童年占一生的 $\frac{1}{6}$ ，过了 $\frac{1}{12}$ 以后他开始长胡子，再过 $\frac{1}{7}$ 以后结了婚，婚后 5 年得子，可惜儿子只活到父亲年龄的一半，丧子 4 年以后老人也渡完了风烛残年”。显然他活到了 84 岁，但是我们对他的生平除这些以外了解甚少。

丢番图的著作《算术》的尚存部分给出了 130 个一次和二次方程的问题的解法。其中还解出了一个很特殊的三次方程。第一卷讲述一元的确切方程，余下的几卷讲述二元和三元，二次或高次的不定方程。丢番图的代数书中缺少一般性的方法，没有形成演绎式的逻辑结构，而只是讲述为求解特定问题而设计的巧妙方法，丢番图只承认正有理数解，并且，在许多场合，满足于对一个问题只求出一个解（只给出一个较大的解）。

此外，丢番图在他的《算术》中也讲述了许多数论命题。例如，形为 $8n+7$ 的整数不能表为三个平方数之和等，因而他的著作成为后世许多大数学家如费尔玛、欧拉、高斯等研究数论的出发点。

丢番图在代数上的成就，已经远远超出了他所处的时代。

三、海伦的几何学

亚历山大里亚时期的几何学成就,除了欧几里得的《几何原本》以外,还有阿波罗尼的重要著作《圆锥曲线》阿基米德的《论螺线》,《论球和圆柱》《圆的度量》等等。另一位重要的几何学家是海伦(Heron,约 62 年),他是一位出色的数学家,又是天文学家、物理学家和优秀的工程师。他的几何著作与生产实际密切相联系,并带有巴比伦和埃及的计算数学的风格,可以说是希腊式的严密推理与东方式的近似计算方法的奇妙融合。海伦的《测量学》是重要的几何著作,其中有著名的海伦公式: $S_{\triangle} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (即已知三角形三边的长求三角形面积的公式)其中 a, b, c 是三角形三边的长, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 。

《几何》是海伦的另一部数学著作,其内容与《测量学》类似。

第八节 刘徽、赵爽的数学成就

一、赵爽的数学成就

赵爽字君卿,没有什么史料可以说明赵爽的生卒年代。可能是东汉末至三国(吴)时代(第三世纪初)的人,他研究过张衡的天文数学著作和刘洪的《乾象历》,也提到过《九章算术》,尤其是他深入研究了《周髀算经》为此写了序言,并作了详细注释。

赵爽承认数学起源于社会实践,接受了前人关于“月不发光”说的正确结论。他认为人与天体的距离虽然很远,不能直接测量,但可以用仪器间接地测量。

赵爽在数学方面的成就,主要是在《周髀算经》注的附录

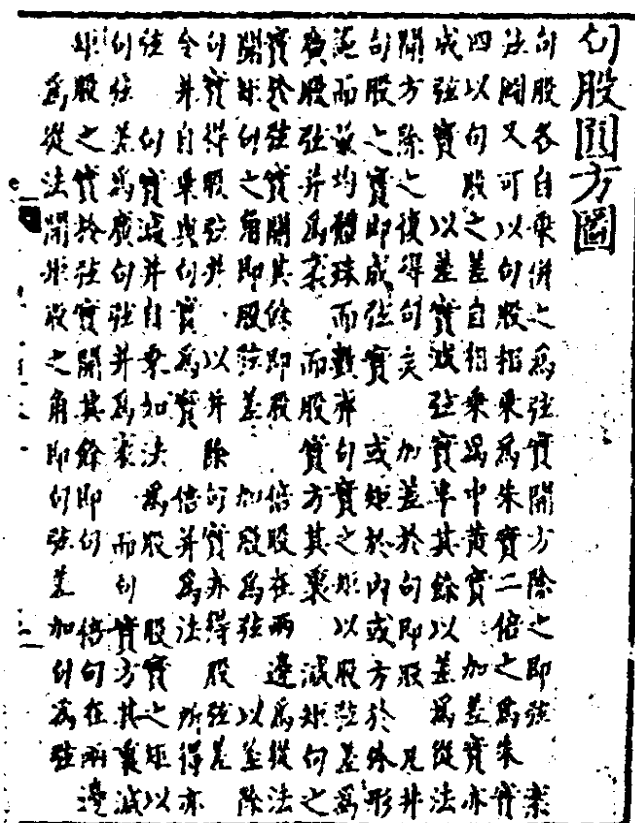
中撰写了《勾股圆方图》说一段文字,全文虽然只有短短的五百三十余字附图六张,但简练地、严密地特别是在我国第一次明确地给出了勾股定理以及关于勾股弦的恒等式的理论证明,并且对二次方程解法提供了新的意见,这是我国数学史上有典籍可以稽考的很有价值的文献之一。传本《周髀算经》中的“勾股圆方图”说有很多文字上的差错,赵爽的六张附图也早已失传。现在的附图是根据原文补绘的,因此附图不一定能与原意完全符合。现在根据钱宝琮校点的注文及补绘的图形并参照传本附图及校绘诸图,将《勾股圆方图》说的主要内容介绍如下:

赵爽把勾股定理写成:“勾股各自乘,并之为弦实,开方除之即弦”(图 1-37)。它的证明利用了一个“弦图”,他在叙述了上述的勾股定理的内容之后,紧接着写道:“案:弦图又可以勾股相乘为朱实二,倍之,为朱实四,以勾股之差自乘为中黄实,加差实亦成弦实”。其中“实”就是面积。意思是说“弦图”(图 1-38)的构成,是把直角三角形的两直角边相乘得到一矩形的面积(正好是两个直角三角形的面积),涂上红色(朱),再二倍,就变成四个相等的直角三角形,都涂上红色,赵爽称这四个勾股形的面积为“朱实”像图 1-38 那样排列起来。中间是以勾、股之差为边的正方形的面积,涂上黄色。赵爽称这个正方形面积为“黄实”,这样正好构成一个以直角三角形的斜边(弦)为边的正方形面积,如以 a 、 b 、 c 分别表示勾、股、弦之长,则有

$$2ab + (b-a)^2 = c^2.$$

经整理即得 $a^2 + b^2 = c^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}.$

赵爽在《勾股圆方图》注中,还写道:“勾实之矩以股弦差为广,股弦并为袤……以并除勾实亦得股弦差”,就是在“弦



赵爽“勾股圆方图”说(采自宋本《周髀算经》,现藏于上海图书馆)

图 1-37

图”内划去一个以股 b 为一边的正方形,余下来的是一个曲尺形,它的面积是 $c^2 - b^2 = a^2$,赵爽称它为“勾实之矩”如图 1-39 所示,

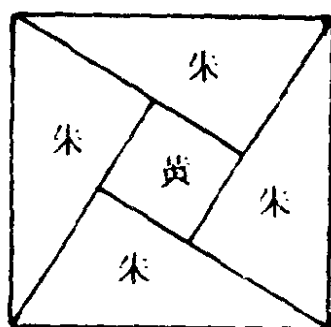


图 1-38

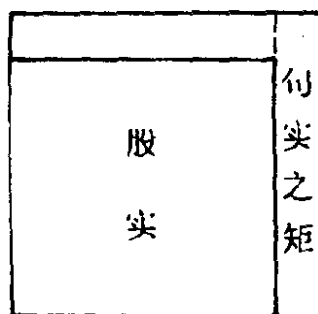


图 1-39

如果把这曲尺形的“句实之矩”依虚线处剪开,拼成一个矩形,则它的长是 $c+b$, 宽是 $c-b$, 因此 $a^2 = (c+b)(c-b)$ 于是

$$c+b = \frac{a^2}{c-b}, \quad c-b = \frac{a^2}{c+b},$$

$$b = \frac{1}{2}[(c+b) - (c-b)] = \frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b} - (c-b)\right] = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)},$$

$$c = b + (c-b)$$

这实质上就是《九章算术》中,勾股章第六题“葭生中央”(参阅本书第 69 页第一章第六节的例)即勾股形中已知 a 及 $c-b$ 求 b 、 c 的术(解法)的依据。

我国古代关于勾股定理的进一步应用(也就是现在所说的解直角三角形)主要的有:在勾股形的 a 、 b 、 c 、 $a+b$ 、 $b+c$ 、 $c+a$ 、 $b-a$ 、 $c-a$ 、 $c-b$ 的九个条件中,已知其二,求其他的情形。这里共有 $c_9^2 = 36$ 种情况。其中有些情况通过勾、股互换可成为同类问题,有些只需用简单运算就可解出所求之值,除这些以外,36 种情况中我们感兴趣的、值得研究的有八种(即:已知① a, b ② $a, c+b$ ③ $a, c-b$ ④ $c, a+b$ ⑤ $c, b-a$ ⑥ $c-a, c-b$ ⑦ $c+a, c+b$ ⑧ $c+a, c-b$ 。)其中前 6 种情况,远在《九章算术》成书年代起(约公元第一世纪)至迟到公元三世纪就已经完满地解决了,即包括既有专用公式又有推导过程。最后两种情况分别由元朝著名数学家朱世杰在他的著作《算学启蒙》和清朝数学家梅文鼎在《勾股举隅》中解决的。

《勾股圆方图》说中有类似的股实之矩及相应的公式,这里从略了。

《勾股圆方图》说中还提出:已知勾弦差、股弦差,求勾、股、弦的问题。在弦方的左下和右上分别割去以勾为一边和以股为一边的正方形如图 1-40 所示,则图中小正方形 S 的边长为 $a+b-c$, 左上和右下角的两个矩形 T 的边长各是 $c-a$ 和 c

— b , 则面积 $T = (c-a)(c-b)$ 。

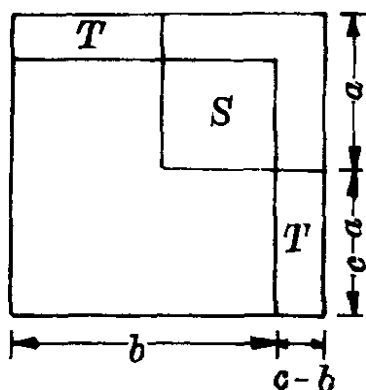


图 1-40

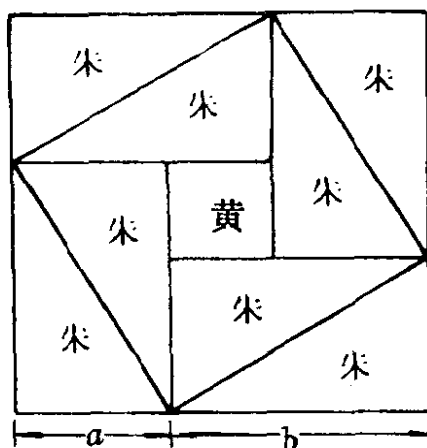


图 1-41

$$\because a^2 + b^2 - S = c^2 - 2T, \quad \therefore 2T = S.$$

$$\text{则} \quad 2(c-a)(c-b) = (a+b-c)^2.$$

$$\text{因此} \quad \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-b) = a,$$

$$\sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a) = b,$$

$$\sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a) + (c-b) = c.$$

于是赵爽在《勾股圆方图》中注文说：“两差相乘，倍而开之，所得，以股弦差增之，为勾。以勾弦差增之，为股。两差增之，为弦”。

在上述注文的基础上，我们再来看：《九章算术》中，勾股章第 12 题“今有户不知高、广，竿不知长短，横之不出四尺，纵之不出二尺，邪之适出。问户高、广、邪各几何”。“答曰：广六尺高八尺，邪一丈”。“术曰：从、横不出相乘，倍而开方除之，所得加从不出即户广，加横不出即户高，两不出加之，得户袤”。这一类的应用问题，现在就很容易理解了。

如果在“弦图”之外再加上四个“朱实”则拼成一个以 $(a +$

b)即勾股并为边的正方形,如图 1-41 所示,这个正方形的面积比两个“弦实”(2c²)少一个“黄实”(b-a)²,于是

$$(a+b)^2 = 2c^2 - (b-a)^2,$$

则
$$a+b = \sqrt{2c^2 - (b-a)^2},$$

(或
$$b-a = \sqrt{2c^2 - (a+b)^2}).$$

因此,可求得勾、股。

赵爽在《勾股圆方图》注中总结的这些命题在《九章算术》勾股章中已有所反映,因此这些命题的出现当早于三国时期。赵爽对它们作了系统地整理,并加以论证,显示了我国古代几何学的重要特色。

二、刘徽的数学成就

刘徽生活在三国时代的魏国,生平事迹已无从详考,曾从事度量衡考校和天文历法研究。公元 263 年,他为《九章算术》作注,提出了自己的数学理论,建立了完整的中算理论体系。大量的创造性工作,使刘徽成为我国乃至世界上的伟大数学家之一。他还撰写了《重差》(后人称为《海岛算经》)一卷作为《九章算术》的附录,成为留给后人的珍贵科学遗产。

下面将简单介绍刘徽在《九章算术》注文中所体现的他在算术、代数、几何和重差方面的成就。

1. 刘徽在算术方面的成就

(1) 十进小数 我国在刘徽以前,计算中遇到奇零小数时,或是化为分数,或是用地位制命名法,或者四舍五入。小数位数少,这样处理固然可以,位数多了,就不方便。刘徽创造了十进小数,用十进分数形式给出。刘徽在方田章圆田术注:“……七十五(平方)寸,开方除之,下至秒忽,又一退法,求其微数,微数无名者以为分子,以十为分母,约作五分忽之二”。

就是把 75 开平方,开得八寸六分六厘二秒五忽。可是还有剩余,再开就得出忽以下的小数,刘徽把它们称为“微数”不再命名。他把所求到的忽以下的第一个数字 4 做分子,以 10 做分母,表示为十进分数 $\frac{4}{10}$ 忽,因此说“约作五分忽之二”。即 $\frac{4}{10}$ 忽 $= \frac{2}{5}$ 忽。这就是以忽为单位,忽以下用十进分数处理。

又如刘徽在少广章开方术注:“…凡开积为方,…求其微数,微数 无名者,以其为分子,其一退以十为母,其再退以百为母,退之弥下,其分弥细。”设 N 为被开方数,其平方根的整数部分为 a 忽,还有剩余为 r (平方忽)即

$$\sqrt{N} = a \text{ 忽} \cdots \cdots \text{余 } r$$

继续求“微数”,以 a_1 为第一个数字,就把它作为分子,以 10 为分母(“其一退以十为母”),再求一次又得数字 a_2 ,把 a_2 做分子,以 100 (10^2) 为分母(“其再退以百为母”)。依此继续求到第 n 次,如已开尽,就得分数 $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$ 即开得之小数部分,因而有

$$\sqrt{N} = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \text{。 (忽)}$$

其中 a_1, a_2, \cdots, a_n 都是 1, 2, \cdots , 9, 0 中之某一个。这种记法(刘徽用文字叙述)和现代十进小数本质上完全一样。

总之,刘徽在对奇零小数的处理上创用了十进小数记法,这在世界数学史上是一项伟大的成就。外国的同样思想到 14 世纪才出现。晚了一千多年。

(2) 齐同术 赵爽首先引用了“齐同”这个术语,在应用上还只是零星的,更没有形成完整的理论。这一工作,由刘徽出色地完成了。

齐同术是对一组分数而说的,例如对分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 通分时,刘徽的“凡母互乘子谓之齐,群母相乘谓之同”。即 ad 和 cb 称为齐, bd 称为同,刘徽又把他的齐同术进一步加以解释:“同”是一群分数的公分母,“齐”是由“同”而来,是为了使分数之值不变。

当然可以直接由定义求“齐”、“同”,但当分子分母都很大时,计算就不方便了。因而,刘徽提出用诸分数分母的最小公倍数去求:“同”、“齐”的方法,即“母除率,率乘子为齐”。“率”就是(诸分母的)最小公倍数,例如分数 $\frac{a}{b}$ 、 $\frac{c}{d}$ 和 $\frac{e}{f}$,且设 $m=[b, d, f]$ (最小公倍数)。所谓“母除率”就是 $\frac{m}{b}$ 、 $\frac{m}{d}$ 和 $\frac{m}{f}$ 。“率乘子为齐”即分别以 $a \times \frac{m}{b}$ 、 $c \times \frac{m}{d}$ 和 $e \times \frac{m}{f}$ 为新分数的分子,

以 m 为公分母,便得分数 $\frac{a \times \frac{m}{b}}{m}$, $\frac{c \times \frac{m}{d}}{m}$, $\frac{e \times \frac{m}{f}}{m}$,这就是齐同以后的结果。

刘徽不仅完成了齐同术理论,而且还推广到用齐同术去求几个分数的平均值,解释衰分术,解“均输”、“盈不足”和“方程”等问题。例如刘徽在衰分章“返衰”下注称:“母同则子齐,齐即衰也”。对于分数 $\frac{a}{b}$ 、 $\frac{c}{d}$ 、 $\frac{e}{f}$ 可通过齐同术(如上述)只需比较分子 $a \times \frac{m}{b}$ 、 $c \times \frac{m}{d}$ 、 $e \times \frac{m}{f}$ 即可比较分数的大小,假定 $a \times \frac{m}{b} > c \times \frac{m}{d} > e \times \frac{m}{f}$ 则 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{e}{f}$,这就是“齐即衰”的意思。齐同术在外国没有提出过,因此可以说是我国古代算术的一个创造。

刘徽在算术方面还作了其他一些研究,并有创见,例如刘

徽说：“法实俱长，意亦等也”，意思是分子(实)、分母(法)都扩大同一倍数，结果和原来的分数一样。

对于《九章算术》中“更相减损”求最大公约数的方法，刘徽也有自己的认识，《九章算术》中没有说明这个方法成立的原理，刘徽则指明了这一点，他说：“其所以减之，皆等数之重叠……”，就是所以能“减之”，是因为两数中有“重叠”的“等数”(公约数)的缘故。

刘徽还对化带分数为假分数进行了解释，还研究了各种比例算法，都称之为“今有术”。

2. 刘徽在代数方面的贡献

(1) 对正负数的认识 我国对正负数的应用较早，可是究竟应当怎样认识正负数，却很少有人论及。刘徽在《九章算术》注中第一次深刻阐述了自己的观点。正负是什么意思呢？刘徽注文中说：“今两算得失相反，要令正负以名之。”“算”当时是指算筹，如果计算时用算筹代表“得”，“失”两种量，那就要用正负数来定义。这个看法是很正确的，用筹进行代数运算时如何区别正负数，以前不见记载。刘徽提出：“正算赤，负算黑，否则以邪正为异。”这就是说刘徽用红、黑两种颜色的算筹区别正负，否则当用一种颜色的算筹时可以在摆法上以“正”、“邪”(斜)区别正负数。这两种方法，对后来的数学都有深远的影响。刘徽还认为：“言负者未必负于少，言正者未必正于多”前一句话是指负数的绝对值未必小，后一句话是指正数的绝对值也不定很大，因此这二句话说的是关于正负数的绝对值。

(2) 改进解线性方程组的“直除法” 刘徽对方程组有很深刻的认识，明确提出当时所说的“方程”应当“令每行为率，二行者再程，三物者三程，皆如物数程之”，即对于线性方程组有几个未知数要列几个方程。这个问题到近代才清楚。此外，

刘徽对方程组解法的研究的贡献也很大。例如方程章第七题：“今有牛五、羊二，直(值)金十两。牛二、羊五，直金八两。问牛、羊各直金几何。”用现代表示法：设 x 、 y 分别代表每一牛、羊值金数。则按题意，得

$$\begin{cases} 5x+2y=10, & \textcircled{1} \\ 2x+5y=8. & \textcircled{2} \end{cases}$$

《九章算术》的解法，通常采用遍乘直除法，令 $\textcircled{2} \times 5$ 得

$$10x+25y=40. \quad \textcircled{3}$$

然后由 $\textcircled{3}$ 两次减去 $\textcircled{1}$ ，即可消去 x 项。刘徽则在注文中依据齐同的原则，创立了互乘对减法，即令方程 $\textcircled{1} \times 2$ 以及方程 $\textcircled{2} \times 5$ ，然后对减一次立即可消去 x 项。得 $y = \frac{20}{21}$ 。这个解法步骤和现代的加减消元法本质上完全一致，而且还可以推广到解四元、五元以及多元方程组的情形。

(3) 建立方程新术。《九章算术》方程章第九题“今有五雀六燕集称之衡，雀俱重，燕俱轻。一雀一燕交而处，衡适平。并燕雀重一斤。问雀燕一枚各重几何”。刘徽在注中指出：“此四雀一燕与一雀五燕，其重等，是三雀四燕重相当，雀率重四，燕率重三也。”因此，本题可以用比例分配(衰分法)来解。

方程章最后一题相当于解下面的五元线性方程组：

$$\begin{cases} 9x+7y+3z+2u+5v=140, & \textcircled{1} \\ 7x+6y+4z+5u+3v=128, & \textcircled{2} \\ 3x+5y+7z+6u+4v=116, & \textcircled{3} \\ 2x+5y+3z+9u+4v=112, & \textcircled{4} \\ x+3y+2z+8u+5v=95. & \textcircled{5} \end{cases}$$

这个问题不论用遍乘直除法或互乘对减法求解，过程都比较繁杂，于是刘徽写了一篇《方程新术》的论文，附于该题的术

(解法)后。他的这一方法的中心思想是先消去常数项,再消去其他项,求得只含有两未知数的方程。然后就用比例表示出来。这时只要求出一个未知数的解,用衰分术即可立即求出各未知量的值。

如这题可求得 $4x=7y$,

$$3y=4z,$$

$$5z=3u,$$

$$6u=5v.$$

从而得 $\frac{x}{7}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{u}{5}=\frac{v}{6}$ 。

由③-④,得 $x+4z-3u=4$ 。⑥

再据 $\frac{x}{7}=\frac{z}{3}$ 有 $z=\frac{3}{7}x$, 据 $\frac{x}{7}=\frac{u}{5}$, 有 $u=\frac{5}{7}x$ 。

代入⑥得 $7x+12x-15x=28$, 故 $x=7$ 。

这样,其余各未知数的值都可求得。

刘徽还研究过等差级数,并且得出求和公式。

3. 刘徽在几何方面的贡献

(1) 关于圆面积圆周率与割圆术 我国古代相传有“周三经一”的说法,刘徽发现这仅是圆内接正六边形的周长与圆径(圆的直径)之比,而非圆周长与圆径之比,因此以 3 为 π 值来计算圆面积和圆柱、圆锥的体积等是很不精确的。西汉末刘歆为王莽造圆柱形的标准量器的铭文上记录的直径、深度和容积,计算出刘歆取用的圆周率大约是 3.1547。东汉天文学家张衡取 $\pi=\frac{730}{232}\approx 3.1466$, 又在他的球体积公式中取 $\pi=\sqrt{10}\approx 3.162$ 。三国(吴)王蕃取 $\pi=\frac{142}{35}\approx 3.1556$ 。但是这些圆周率近似值的取法都没有什么理论根据,第一个把推求圆周率近似值放在理论上创始用割圆术计算的是刘徽。他为

计算方便起见,“置圆径二尺,半之为—尺,即圆里六觚之面也。”也就是这时圆内接正六边形的边长为—尺。然后逐渐倍增边数,计算出同圆内接正 12 边形、正 24 边形、正 48 边形、正 96 边形和正 192 边形的面积。其中

$$S_{96} = 313 \frac{584}{625} (\text{平方寸}), \quad \textcircled{A}$$

$$S_{192} = 314 \frac{64}{625} (\text{平方寸}). \quad \textcircled{B}$$

刘徽首先肯定圆内按正多边形的面积小于圆面积。然后正多边形边数逐次倍增,则面积逐次增大,边数愈大则正多边形面积愈近于圆面积。因而刘徽在《九章算术》注文中说:“割之弥细,所失弥少。割之又割以至于不可割则与圆合体而无所失矣”。也就是说当边数成倍增加地分割下去,则被分割的圆弧和所对应正多边形的边就愈短,这就是“割之弥细”,于是圆内接正多边形的面积与圆面积的差愈小。这就是“所失弥少”。按照这种方法,如果分割次数无限增加时,则正多边形势必与圆重合,这样正多边形面积就与圆面积相等,而“无所失矣”,上述这段注文,充分体现了刘徽的极限思想。如果用近代符号表示,即是:设 S 为圆面积,则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $|S_{3 \cdot 2^n} - S| < \epsilon$,

$$\text{或 } \lim_{n \rightarrow \infty} |S_{3 \cdot 2^n} - S| = 0, \quad \text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3 \cdot 2^n} = S, \quad \textcircled{C}$$

刘徽还证明了不等式: $S_{3 \cdot 2^n} < S < S_{3 \cdot 2^n} + (S_{3 \cdot 2^n} - S_{3 \cdot 2^{n-1}})$ 。于是有 $S_{192} < S < S_{192} + (S_{192} - S_{96})$ 。

$$\text{由 } \textcircled{A} \text{ 及 } \textcircled{B}, \text{ 得 } 314 \frac{64}{625} < S < 314 \frac{64}{625} + \frac{105}{625}.$$

刘徽在这里舍弃了分数部分,把 314 取作圆内接正 192 边形的面积。因为已经假定圆的半径为 1 尺,因而得 $\pi \approx 3.14$ 刘徽又用几何方法把它化为 $\frac{157}{50}$ 。因此后人把圆周率近似值

取 3.14 或 $\frac{157}{50}$ 称为“徽率”。

刘徽割圆术的出现,在世界数学史上虽晚于希腊的阿基米德,但在我国数学史上却是十分重要的。首先刘徽的不等式只需要圆内接正多边形、而不需要圆外切正多边形,因而能够达到事半功倍的效果。其次我们祖先用位值制记数及计算,乘方、开方等运算都能迅速地完成,远比希腊人的计算方便得多。

此外《九章算术》中有计算圆面积的重要公式:“半周半径相乘得积步。”(图 1-42)这是我国古代劳动人民通过大量生产实践总结出来的正确成果。但是这个公式究竟是如何形成的,由于经文过于简略,其他材料又十分缺乏,因而不可稽考。

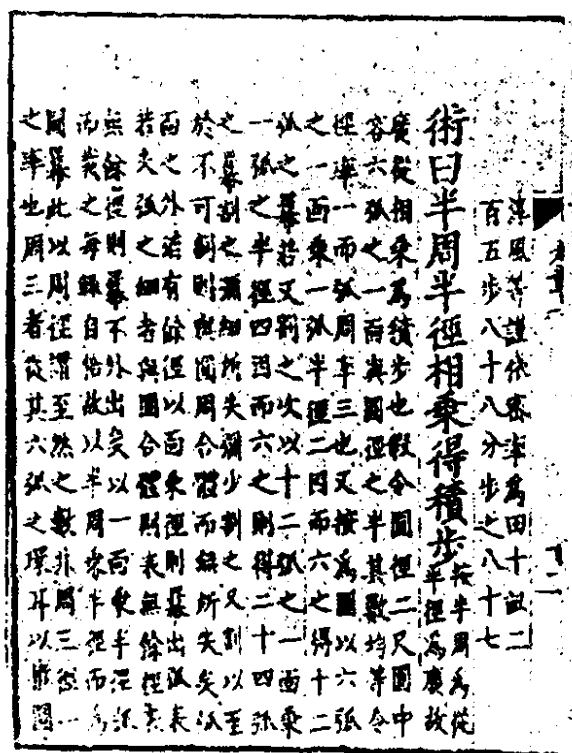


图 1-42 刘徽割圆术

(采自宋本《九章算术》)

刘徽在《九章算术》注中说：“半周为从，半径为广，故广从相乘为积步也。”至于刘徽如何把半周看作“从”，把半径看作“广”，或者如何把圆变为与之等积的长方形的。刘徽在注文中详细的说明。这里只简略地说说他的成果。刘徽用割圆术获得公式③，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3 \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot 2^{n-1} \cdot a_{3 \cdot 2^{n-1}}}{2} \cdot r \right) = \frac{C}{2} \cdot r = S$$

(这里 r 是圆的半径, a_n 是圆内接正 n 边形的边长, $n=1, 2, 3, \dots$) 可能由于圆面积是两数 ($\frac{C}{2}$ 与 r) 的乘积, 因而刘徽便称之为“半周为从, 半径为广”。这就是刘徽用割圆术从理论上推证圆面积公式的过程。

(2) 关于圆锥、球体体积的研究与刘徽原理 我国古代把球称为“立圆”, 又叫做“丸”。在《九章算术》“少广”章有已知“立圆”体积求径(直径)的算法: “术曰: 置积(立方)尺数, 十六乘之, 九而一, 所得, 开立方除之, 即丸径”。设 d 表示球的直径, $V_{\text{球}}$ 表示球体积, 则《九章算术》的算法为

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{9} V_{\text{球}}}, \quad \text{于是} \quad V_{\text{球}} = \frac{9}{16} d^3. \quad \text{①}$$

由于圆与其外切正方形面积之比为 $\pi : 4$, 而当时因取 $\pi = 3$, 因此圆与其外切正方形面积之比为 $3 : 4$ 。

正方体与其内切圆柱体积之比为 $4 : \pi = 4 : 3$, 即等边圆柱与外切正方体体积之比也为 $3 : 4$ 。

在《九章算术》时代, 人们视等边圆柱为方, 其内切球为圆。因而认为球与其外切等边圆柱体积之比也是 $3 : 4$ 。

于是得球与其外切的正方体体积之比为 $9 : 16$ 。即得公式①。

刘徽首先发现: “球与其外切等边圆柱体积之比是 $3 : 4$ ”

是错误的。刘徽从一正方体出发,先由一侧面截成内切圆柱,又以他一侧面也截成一内切圆柱,此两圆柱的共同部分的形状,刘徽称之为“牟合方盖”(图 1-43),我国古代称伞为“盖”“牟”与“侔”通,相同的意思。“牟合方盖”就是翻过来合在一起的两个全等的方伞。

用平行于 $AEBO$ 的平面截牟合方盖与其内切球,则其截面总是正方形与其内切圆。因而球与其外切的牟合方盖的体积之比才是 $3:4(\pi:4)$ 。而牟合方盖的体积显然小于外切的等边圆柱。从而证得“球与其外切等边圆柱体积之比是 $3:4$ ”是错误的。于是球体积的计算公式: $V_{\text{球}} = \frac{9}{16}d^3$ 也是错的。

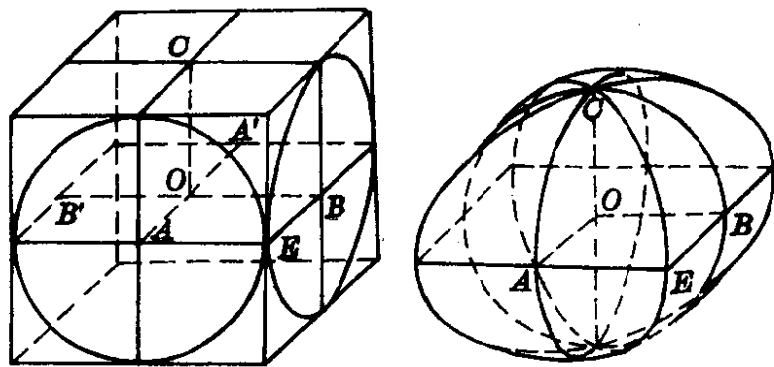


图 1-43

这样球体积的计算公式就归结为如何计算牟合方盖的体积。这是刘徽对球体积计算的一个重大贡献。尽管刘徽并没有找到计算牟合方盖的方法,但是他为后人指明了方向。刘徽这一未竟事业,后来由祖冲之父子完成了。刘徽在上述论证的过程中,实质上还运用了他所发现的一个原理:“如果两个高相等的立体,在任意等高处的截面面积的比总等于常数 k ,则它们体积的比也等于 k ”,这一命题后来称为刘徽原理。刘徽运用这一原理还解决了圆锥体积的计算问题。刘徽在“委粟依

垣”术里注解：“从方锥（正四棱锥）中求圆锥之积亦犹方幂求圆幂”。这说明圆锥体的体积和其外切方锥体体积之比应等于圆面积和其外切正方形面积之比。从而圆锥体积应是方锥体积的 $\frac{\pi}{4}$ 倍。仿此还可得圆台的体积也是外切方台体积的 $\frac{\pi}{4}$ 倍。

此外，刘徽关于几何命题的推证，常用“以盈补虚”或“出入相补”及“棋验法”，简单而明确，充分体现了刘徽在注《九章算术》的序言中所说的“析理以辞，解体用图”的思想。

4. 刘徽的重差术

“重差”是我国古代数学在测量上的一种重要应用，在《周髀算经》中已有类似问题。周朝初年（约公元前1100年）周公问商高用矩尺测量的方法，商高说：“偃矩以望高，复矩以测深，卧矩以知远”。就是不知目的物的远近，要量它的高，必须两次“偃矩”测望，量它的深，必须两次“复矩”测望，量二目的物之间的距离，必须两次“卧矩”观测。因而东汉时代的数学家称这种测量方法为重差术。刘徽在前人工作的基础上，对重差术继续进行研究，举了九个例题，编写成“重差”章，附在《九章算术》“勾股”章的后面。因为它的第一题是一个测量海岛的问题，于是这个重差章的单行本，在唐朝以后就称为《海岛算经》。

《海岛算经》第一题为：“今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直从前表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末参合。问岛高及去表各几何。”“答曰：岛高四里五十五步，去表一百二里一百五十步。”“术曰：以表高乘表间为实。相多为法，除之。所得加表高，即得岛

高。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实。相多为法，除之，得岛去表里数。”

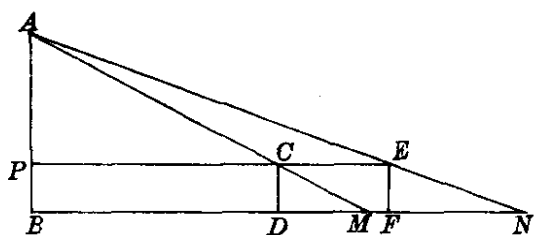


图 1-44

如图 1-44 所示：海岛 AB ，岛峰为 A ， CD 为前表， EF 为后表，前表却行为 DM ，后表却行为 FN 。

按术计算： $AB = \frac{CD \cdot DF}{FN - DM} + CD$ 这就是测海岛高的重差公式。

这个计算步骤是怎么得来的？《九章算术》没有详述。刘徽在他注《九章算术》所写的序中对重差术的意义、方法和他研究的大概经过有一段较详细的记述。他说：“凡望极高测绝深而兼知其远者必用重差，勾股则必以重差为率，故曰重差也。”这就是说重差用于测量那些不可到达的远距离“以重差为率”指的是用两次差并通过“率”，即相似直角三角形的性质定理比例线段进行计算的。

因此以往一般认为：刘徽是通过直角 $\triangle APC \sim \triangle CDM$ 以及直角 $\triangle APE \sim \triangle EFN$ ，从而

$$AP \cdot DM = PC \cdot CD, \quad (1)$$

$$AP \cdot FN = PE \cdot EF. \quad (2)$$

②－①式，然后加 CD 得到的。

不过有些学者对刘徽是否通过直角三角形相似原理来推出公式，提出了疑义。认为我国古代几何中，并未见到明显的

平行线概念。角度也很少用,虽有比例理论,但局限于勾股相似形。相反:“出入相补,各从其类”的原理,在当时著作中曾有多方面的应用。因而海岛第一题公式也可能用出入相补原理推得如图 1-45 所示。因为从矩形 $ABNS$ 的对角线 AN 上一点 E ,可得 $\square BE = \square ES$ (指矩形 $BFEP$ 与 $ERST$ 面积相等,下同)。 $\square BC = \square CU$

则 $\square BE - \square BC = \square ES - \square CU$ 即 $\square DE = TE \cdot ER - VC \cdot CQ$ 。

于是 $CD \cdot DF = AP(FN - DM)$ 。 同样,可得海岛第一题公式。这一推证方法及过程与赵爽测日高是一致的。

当然,上述两种证法都只是两种推测而并非定论。

《重差》中共有九个问题,包括了刘徽测量高深广远的三种基本方法,即重表法(立两个等高的竿),累矩法(用两个矩代替“表”)、和连索法(用绳和“表”)但本质上没有什么区别。此外,《重差》中还有“三望”题四个(三次测望)、“四望”题两个。

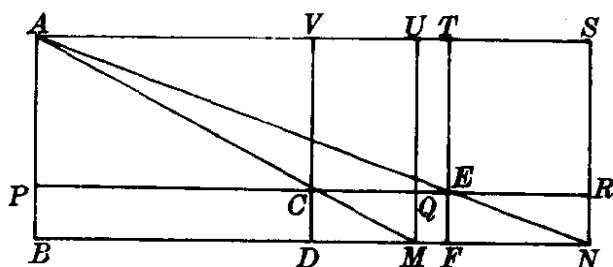


图 1-45

第九节 孙子算经、祖冲之、祖暅

我国两晋南北朝时期,尤其是南北朝时期的数学著作较多,流传到现在的有《孙子算经》、《张邱建算经》、《五曹算经》、

《五经算术》、《数术记遗》和《夏侯阳算经》等几种。这些书基本上反映了当时社会各方面对数学的需要。这一节主要介绍《孙子算经》及其中著名的中国剩余定理,以及祖冲之父子的数学功绩。

《孙子算经》的作者与编纂年代史书没有确实的记载。大约在公元四、五世纪,成书于祖冲之以前。传本《孙子算经》与《隋书·经籍志》所载之《孙子算经》在分卷、度量衡单位名称等方面均不相合,可见传本《孙子算经》在隋以后有人改窜和附加之处。

现传本《孙子算经》(图 1-46)分三卷。其中第一卷叙述筹记数和演算。关于筹算乘除法的具体演算步骤,可用现代语言表述如下。

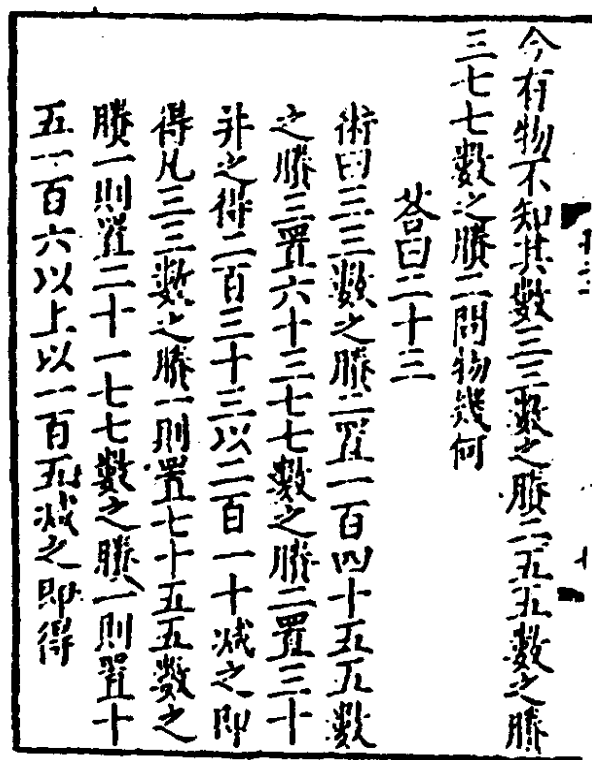


图 1-46 宋本《孙子算经》(现藏于上海图书馆)

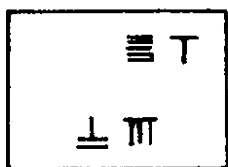


图 1-47

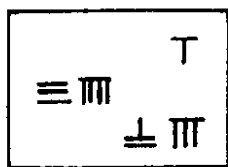


图 1-48

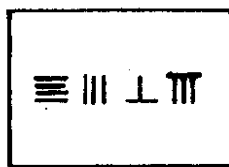


图 1-49

二数相乘时先用算筹布置一数于上格,一数于下格,没有被乘数和乘数的区别。把下格的数向左边移动,使下数的末位和上数的首位对齐(图 1-47)。以上数首位数目分别乘下数各位,从左边到右边,用算筹布置逐步乘得的数于上下两格的中间(图 1-48),并且把后得的乘积依次并入前所已得的数。求得了这一个部分乘积之后,把上数的首位去掉,下数向右边移过一位(图 1-48)。再以上数的第二位乘下数各位,并入中间已得的积数内(图 1-49)。这样继续下去,到末了上数各位一一去掉,中间所列就是二数的相乘积。例如上述的 78×56 。最后中间的 4368 就是所求的乘积。

古代筹算除法的演算步骤和乘法相反。用算筹布置实数(被除数)于中格,法数(除数)于下格,所得的商数布置在上格,先把法数的首位放到实数首位下边(图 1-50),议好应得商数的首位。如果实数不够大,则把法数向右移过一位(图 1-51),再考虑商数的首位,以商数首位乘法数各位,从左边到右边,随即在中格实数内减去每次乘得的数,然后把法数向右移一位,再议商数的第二位(图 1-52)。再以商数第二位依次乘法数各位,从实数内减去每次乘积如前(图 1-53)。于是,到中格实数减完时,就得到所求的结果。如果实数减不尽就是有余

数。例如上述的 $4392 \div 78$ 最后的 $56 \frac{24}{78} = 56 \frac{4}{13}$ 。这是一个带分数。

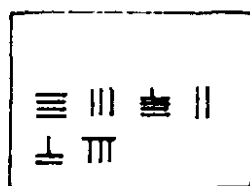


图 1-50

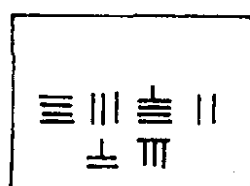


图 1-51

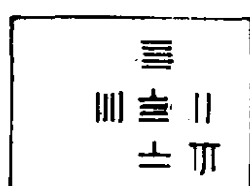


图 1-52

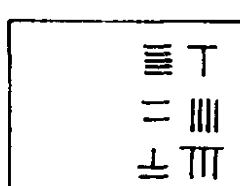


图 1-53

《孙子算经》的第二卷举例说明筹算的分数算法和开平方法(参阅本章第六节)。因而,《孙子算经》是目前发现的一本详载筹算法的书,是我们考证古代筹算法的主要依据。

《孙子算经》的第二卷和第三卷选用了大量浅近易懂的属于日常生活的应用问题(共有 64 个问题),在《九章算术》深度的范围内每章各举一二个典型例题,并指示其解题方法。这对初学数学的人是很有帮助的。因此,可以说《孙子算经》是一部启蒙的算术入门书。

《孙子算经》中最有价值的内容是第三卷第 26 题的“物不知数”问题。它最早记叙了举世闻名的孙子“剩余定理”原题是“今有物,不知其数。三、三数之,剩二;五、五数之,剩三;七、七数之,剩二。问物几何”。“答曰:二十三。”这个问题用现代数论里的同余式符号来表示即:已知

$N \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$, 求最小的数 N 。

答案是 $N = 23$

该题“术曰:三三数之剩二,置一百四十;五五数之剩三,置六十三;七七数之剩二,置三十。并之得二百三十三,以二百十减之,即得。凡三三数之剩一则置七十,五五数之剩一则置二十一,七七数之剩一则置十五。一百六以上,以一百五减之,

即得”。

按照术文的前半段,这问题的解为

$$N=70\times 2+21\times 3+15\times 2-2\times 105=23。$$

依据术文的后半段,下列一次同余式组

$N\equiv R_1(\bmod 3)\equiv R_2(\bmod 5)\equiv R_3(\bmod 7)$ 的解为

$$N=70R_1+21R_2+15R_3-105p \quad (p \text{ 为正整数})$$

[或 $N\equiv 70R_1+21R_2+15R_3(\bmod 105)$]

这个“物不知数”问题是一个很有猜谜味道的趣味题,它的解法也很巧妙。以后,在民间流传很广,并且流传到后世,还有“秦王暗点兵”、“剪管术”、“鬼谷算”、“韩信点兵”等各种有趣的名称。表面上看来,这只是一个游戏题,实际上有很强的天文学背景,同时也是数论中同余式理论的出发点,它的一般情形由我国宋代数学家秦九韶用大衍求一术求得解决。传到国外后,被称为“中国剩余定理”(详见第二章第五节)。

在南北朝时期,出现了我国伟大的数学家:祖冲之和他的儿子祖暅(音 geng),他们的数学工作曾在世界上领先多年。

祖冲之(公元 429~500 年),字文远,涑水县北)人,生活于南北朝时代南朝的宋、齐(公元 479~502 年)两朝。宋孝武帝(公元 454~464 年)时把他安排在政府的学术机构——华林学省,从事学术研究工作。后来被调到南徐州(今安徽南部江苏北部地区,行政中心在今江苏省镇江市)做从事史(州刺史的属员)不久又被调回建康(刘宋首都,今南京市)任公府参军。还出任过娄县令(娄县在今江苏省昆山县东北),到齐灭刘宋以后他又到齐政府中担任谒者仆射(是一种掌管朝廷宴会等的礼仪官),晚年提升为南朝首都建康的长水校尉(高级将领)。他曾向朝廷提出《安边论》,主张:“开屯田,广农殖”,当时的齐朝统治者也表示支持,打算让他“巡行四方”,兴办某些事

业。可是不久他与世长辞了。

祖冲之的一生虽然担任过各种大小官职,行政事务十分繁忙。可是他热爱科学,几十年中仍利用一切工余时间孜孜不倦地从事天文历法和数学的研究。

祖冲之的研究工作十分认真,对前代的历法书几乎都进行了分析比较,还进行了实测,对八尺高标杆的日影长度观测持续长达十年之久,在这基础上,他认为当时国家颁行的元嘉历法不够精密,于是在他年仅 33 岁时就制定了当时最先进的历法——《大明历》。

《大明历》提出后,横遭权势们的反对,但祖冲之却毫不屈服,于大明六年与守旧派官僚代表戴法兴当面进行了激烈的辩论。在辩论中,他指出天体的运动是有规律的,“迟疾之率,非出神怪,有形可验,有数可推。”反对戴法兴用“曲辩碎说”、“浮辞虚贬”来无理指责,要求他“准以实见”。

祖冲之还创造过指南车、水碓磨、千里船等多种机械。

祖冲之的儿子祖暅,字景烁,也是一个博学多才的人。在南朝的梁朝任员外郎、材官将军、奉朝清等官职。生卒年代无可查考。他在父亲的教育下对数学与历法有很深的造诣。在梁朝初年曾两次建议修改历法(公元 504 及 509 年)提出他父亲所造的大明历,经过太史令等实测天象,考验新旧历法后,终于政府在公元 510 年起,颁布启用《大明历》。祖暅曾抄集古代星占记录,撰《天文录》三十卷又撰《漏刻经》一卷制造过漏刻,进行过测量(太阳)和恒星观测工作。梁天监十三年(公元 514 年),奉命在淮河上指挥修筑浮山堰(拦水坝),公元 516 年秋天新筑成的拦水坝被洪水冲毁,因而被投入监狱,祖暅出狱不久,在南朝的边境被北朝俘虏,软禁于北魏元延明宾馆中(徐州)在那里遇到北朝学者信都芳,并给他讲授数学。不久祖

暉即放还南朝。有些古籍中曾说：祖暉“位至太府卿”，“位至南康太守”。

祖冲之的家庭有学术传统，他的先人有的搞建筑工程，有的写过文学作品，历法研究也有家学渊源。

祖冲之父子虽然有多种功绩，但最大的成就是在数学方面。祖冲之研究过《九章算术》和刘徽的注解，同时给《九章算术》和刘徽的《重差》作过注。并且著有《缀术》一书，十分可惜的是这些重要的文献都已失传，这是我国乃至世界科学史上的一个重大损失。现在我们只能从其他著作中找到一些有关祖冲之数学成就的记载。

一、在圆周率方面的伟大贡献

祖冲之和刘徽一样，也考校过度量衡。祖冲之曾指出过刘歆（王莽时期）研究度量衡过程中所使用的圆周率是不精确的。祖冲之在刘徽的基础上继续研究圆周率，经反复计算，求出新值。再用新值考校刘歆的原值，发现刘歆计算有错。因而称“汉时斛铭，刘歆诡谬其数”是“算氏之剧疵”。这说明祖冲之由于研究度量衡的需要，才去研究圆周率的。

祖冲之在圆周率方面取得巨大成就，《隋书·律历志上》记载得很清楚：

“古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽；朒（音 nu）数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，‘盈数’和‘朒数’就是它的过剩近似值和不足近似值，正数在盈朒二限之间。密率圆径一百一十三，圆周三百五十五，约率圆径七，周二十二”。这是一段非常重要

的记载,主要指出以下一些事实:祖冲之以更开密法获得

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

$$\text{密率: } \frac{355}{113}, \quad \text{约率: } \frac{22}{7}.$$

祖冲之用“盈朒二限”来限定一个尚未完全知道的数值的范围是一种创见。但更主要的还是圆周率值。盈朒二限的平均值为 3.14159265,已经准确到小数第 8 位。这是当时世界上最佳的结果。

“密率” $\frac{355}{113}$ 更是数学史上的卓越成就。在外国一直到 16 世纪才由德国的奥托(Otto)等重新获得这一结果。但是比祖冲之已经晚了整整一千多年。因此,已故的日本数学史家三上义夫曾建议把密率 $\frac{355}{113}$ 称为“祖率”,以纪念祖冲之的伟大贡献,前苏联莫斯科大学礼堂前的廊壁上,用彩色大理石镶嵌着的世界著名科学家的像中,其中就有一位是祖冲之。这些都标志着祖冲之的科学成就,已为世界人民所推崇和赞扬。

因为祖冲之的数学著作《缀术》已经失传,而《隋书·律历志上》又只记载着结论而没写明求得的方法。所以祖冲之是怎样求得圆周率值的这一结果的,现在已无法知道了。

这里顺便说说圆周率是最常见、常用的数学常量,自古以来世界上各民族、各著名数学家都为之作过不少研究,取得不同程度的成果。在探索过程中,由纯粹取自经验、直接度量到进入理论研究,用几何方法、数学分析方法、最终用无穷项表达式逼近真值。在计算工具上由手算步入台式计算机、电子计算机计算。于是 π 的性质及其精度已不断得到提高。至 1966 年,1967 年法国的纪路(Guilloud)及其同事在巴黎原子能委员会已先后取得了 π 的 25 万位和 50 万位值。

二、球体积的计算

祖冲之研究了《九章算术》中误差很大的“开立圆术”，也研究了张衡、刘徽在这个问题上的尝试。他批评了张衡，说他“述而弗改”，同时又从刘徽早已求出的

$$V_{\text{球}} : V_{\text{牟}} = \pi : 4$$

的基础上，着手通过先求牟合方盖的体积，然后解决球体积计算的刘徽思路中，进行了深入的探讨。祖冲之父子把问题解决的关键放在“牟合方盖”体积计算上，但在实际计算中他们又不是把精力放在计算牟合方盖本身，而是把要点放在求一个立方体与其内切牟合方盖的差的部分（我们不妨称它为“方盖差”），再把“方盖差”自然分成八个相等的小立方体，每一个称它为“小方盖差”[图 1-54(2)]。

这样祖冲之父子便把问题转化和简化为从八分之一的立方体和所含的八分之一的牟合方盖的差（即一个“小方盖差”）入手。这就是祖氏父子比较高明的地方。

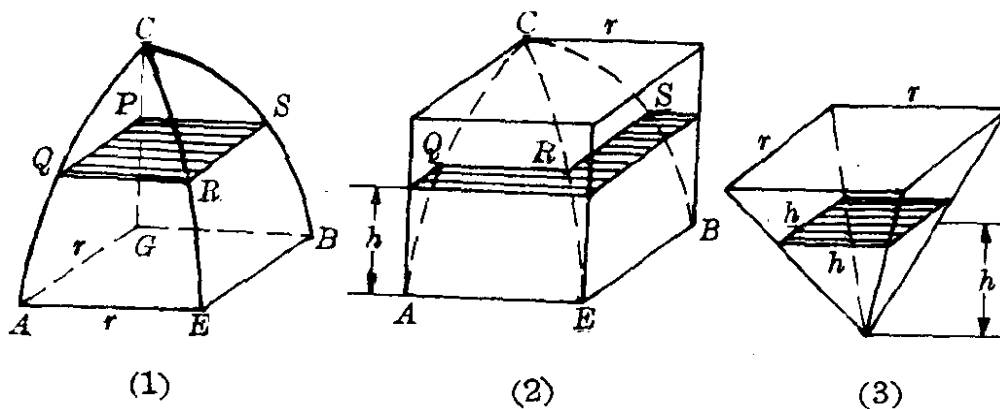


图 1-54

在小方盖差中(图 1-54), PQ 是这小方盖水平截面正方形的一边, 令其为 a , GQ 是球半径 r , GP 是高 h , QPG 是一直角三角形, 于是由勾股定理得 $a^2 = r^2 - h^2$ 。这正是截面 $PQRS$

的面积[图 1-53(1)]。在同一位置上的小立方体的截面面积为 r^2 ，而 r^2 与 a^2 之差，即 $r^2 - a^2 = h^2$ 正是小方盖差在等高处的截面面积[图 1-53(2)]。这个面积有一非常突出的特点，就是它正好是截面高度 h 的平方。而底边为 r ，高也是 r 的倒正四棱锥（即正方锥）在高为 h 处的截面面积也正好为 h^2 [图 1-53(3)]”。这正是祖氏父子抓住的解决问题的关键：也就是小方盖差与倒立正四棱锥在等高处 h 的截面面积总是成对相等。于是祖氏父子总结了它们的体积关系，并提出了“缘幂势既同，则积不容异”的原理。其中“势”是高，“幂”是面积，意思是说：如果两个高相等的立体在任意等高处的截面面积总是成对相等，则它们的体积就不应该两样。由此得到小方盖差和倒立正四棱锥的体积相等的结论。

正四棱锥的体积是可以求的，它等于同底立方体的体积的三分之一，因而也就知道了小方盖差的体积。由小立方体的体积减去小方盖差的体积，余下的就是八分之一牟合方盖的体积。也就是 $r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{1}{8}V_{\text{牟}}$ ($V_{\text{牟}}$ 指牟合方盖的体积) 于是

$$V_{\text{牟}} = 8r^3 - \frac{8}{3}r^3 = (2r)^3 - \frac{1}{3}(2r)^3 = \frac{2}{3}(2r)^3$$

但是，刘徽早已求出

$$V_{\text{球}} : V_{\text{牟}} = \pi : 4。$$

因而祖氏父子立刻就得到

$$V_{\text{球}} = \frac{\pi}{4}V_{\text{牟}} = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{3}(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3。$$

这就是球体积的正确公式。当时祖氏父子取 $\pi = \frac{22}{7}$ ，公式就变

形为：
$$V_{\text{球}} = \frac{11}{21}D^3 \quad (\text{其中 } D=2r)$$

从《九章算术》以来的四百多年中，有关球体积的计算经

过许多人的不懈努力,最后获得彻底解决,这在我国数学史上是一件很辉煌的大事,它说明我国人民不仅能从理论上独立解决实践中提出的数学问题,而且在解决问题的方法上,也有自己独创的特色。

祖氏父子的“缘幂势既同,则积不容异”原理是刘徽原理的特殊情形。当刘徽原理中的比值等于1的时候,就成了祖氏的结果。祖冲之父子比较高明的地方在于吸取了刘徽的教训,不再直接去钻牟合方盖体积的那个牛角尖,而改为研究方盖差的体积,从而获得了成功。也正是这条途径才引导他们获得“祖氏原理”。条件的限制,刘徽虽未能最终解决问题,但刘徽的独特思路为祖氏父子的成功创设了条件。1635年意大利数学家卡瓦利里(B. Cavalieri 1598—1647年)提出与刘-祖原理相仿的,国外称为卡瓦利里公理,迟于祖氏父子一千一百多年。

三、《缀术》和开带从立方

祖冲之父子对数学进行了广泛的研究。据历史记载祖冲之著《缀术》五卷,祖暅著《缀术》六卷。但历史记载中找不到两本著作间的关系。推测祖暅的《缀术》可能是在祖冲之的《缀术》基础上续作的。由于《缀术》原书早已失传,无法确切知道其具体内容。它是在《九章算术》及刘徽注的基础上所撰的数学杰作。唐王孝通在《上缉右算经表》中称赞说:“祖暅之‘缀术’,时人称之精妙”。这个“缀术”似乎是指的一种方法,由此可以推想:“缀术既是书名,又是方法名称。有关圆周率的计算和球体积的解决,无疑已包含于其中。《隋书·律历志上》说:祖冲之“又设开差幂,开差立,兼以正圆^①参之。指要精密,算

^① 钱宝琮认为传本《隋书》把“负”字误作“圆”字。

氏之最也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理”。很显然，“开差幂”，“开差立”以及“正圆参之”都是《缀术》的内容。

“开差幂”、“开差立”可能涉及开带从平方和开带从立方的较为深奥的问题。因此唐初被列为国立学校的教科书之一。规定要化四年时间来学习它。

第十节 本章综述

在人类古代很长的一个时期内，数学的发生与发展是分别在各自独立的环境中发生和成长起来的。古代的传统数学根据各国不同的自然、历史等条件，各有自己的特色，并自成系统。因此研究古代传统数学应该以当时历史条件下根据历史事实来考虑和解释各种数学现象和观念。这样各国古代的传统数学才能保持其原有风貌，才能看清其特色。

尽管各国从时间上来说有早晚，从内容上来说有差异，但是最早的数学发生都是从生活、生产实践活动中开始的，都经历了数学知识长期积累的过程，然后才逐步走上概括整理建立其理论体系的道路，因此从认识数学的过程来看应该说是一致的。

另一方面，正因为生活、生产实践活动各各不同，积累的内容、程度各有差异；概括：整理的手段各有不同的传统，因此从各国传统数学的内容来看，又各有特色、体系各异。

数学是研究客观世界的数量关系和空间形式的科学。而东、西方（例如我国与古希腊）数学的早期发展，正是在数、形和数形结合这三方面内容以及形成体系的方法上各具有不同特色的。

古希腊欧几里得的《几何原本》，是首先把几何知识按逻辑方法，建立了数学演绎体系的典范，而中国刘徽注释的《九章算术》则对几何问题的处理，是从丰富的实践经验中发现问题按平面图形的割补原理（出入相补或损广益狭的原理）和空间图形的棋验方法（模型验证的方法）来解决的，创造了有我国特色的几何学。

在我国数学的早期发展中，对数量关系的研究，是我国所擅长的，代数学无可争辩地更是中国所创造的。在16世纪以前，除了阿拉伯某些著作之外，可以说代数学的许多工作，中国一直处于领先地位。在《九章算术》中，解决各种比例问题的“今有术”，对近邻国家甚至对欧洲发生过影响的“盈不足术”以及从两汉历经隋唐宋元，能够正确、迅速地列出和数值解方程、方程组、不定方程和不定方程组等等，对这些问题我国都有独特的贡献。而这些数量关系上的成就，又是在算筹记数和计算的基础上完成的，不仅可以简捷地进行自然数运算，还可以进行分数运算，甚至有理数运算。如果把元明以后风行全国的珠算看成是算筹的发展、改革和延续的话，那么我们更有理由认为中国传统数学，在数量关系上是以筹算制为主线贯穿在一起的。

此外，我国代数学的发生发展，始终与几何的兴旺发达交错贯串、相辅相成的。《九章算术》中开平方、开立方等无疑是刘徽“解体用图”的具体应用。反过来，几何问题又依赖于数量关系，如赵爽“勾股圆方图注”凭借计算，证明勾、股、弦关系。有圆面积，作为内接正多边形倍增边数的极限也是通过计算得以阐明的。因此我国数学的早期发展，是十分重视数与形的结合。

第二章 中世纪的数学(529~1600)

第一节 古希腊数学的衰落、罗马人的数学、中世纪的黑暗

希腊数学在亚历山大里亚时期达到颠峰。欧几里得的巨著《几何原本》问世并一直流传至今,以致欧几里得一度几乎成了几何学的同义词;阿波罗尼斯用综合方法研究圆锥曲线的性质,堪称一绝;阿基米德在力学上的成就以及关于求抛物线弓形面积的穷竭法等令人叹服,其中所孕含的极限和积分的思想,已经超越了时代。数学史家常常把阿基米德和牛顿、高斯并称为数学史上三个最伟大的数学家。此外,托勒密建立的三角学,海伦在几何上的成就,丢番图关于不定方程的研究在数学史上都占有重要的地位。

数学的发展与生产、经济及其他科学一样,无法摆脱政治历史条件的影响。罗马人的入侵给古希腊数学带来了巨大的灾难。第二次布匿战争期间,罗马统帅马塞拉斯(Marcellus)率大军围攻阿基米德的故乡叙拉古,阿基米德运用自己的聪明才智发明制造了多种精巧的武器和器械,并与守城军民一起给敌人以重创。公元前 212 年,叙拉古失陷,一个罗马士兵冲到阿基米德近前,传说他当时正在专心致志地画几何图形,这个士兵用脚把图形踩坏,遭到了阿基米德的怒斥:“不要弄坏我的图形!”尽管马塞拉斯出于对阿基米德的敬佩,事前曾

下令不准伤害这位学者,但阿基米德还是死在恼羞成怒的士兵的利刃之下。马塞拉斯为阿基米德建造了费工很多的陵墓,墓碑上刻有阿基米德生前最钟爱的“球内切于圆柱”的图形,以资纪念。因为阿基米德生前曾发现:“球的体积和表面积,分别等于其外切圆柱体积和表面积的 $\frac{2}{3}$ ”,这是他一生中证明过的最得意的定理之一。

公元前 146 年,罗马人占领了希腊本土。公元前 47 年,罗马统治者凯撒大帝(Caesar)指使纵火焚毁了停泊在亚历山大里亚港的埃及舰队,大火延及该城,殃及图书馆。代表着希腊文明的大量藏书和五十万份手稿付之一炬,只有少量藏于一座名叫塞拉皮斯神庙中的图书幸免于难。这是历史上最大的文化浩劫之一。

公元以后,基督教兴起,出于愚昧的迷信和宗教的狂热,基督教的领袖们排斥异教的学问,鄙视数学、天文和物理学,基督徒是不许“沾染希腊学术这个脏东西的”。由于基督教的广为传播和势力日益扩大,罗马帝王康斯坦丁(Constantine)不得不奉它为罗马帝国的国教。此后,基督徒摧毁希腊文化的行径更是有恃无恐、变本加厉了。他们纵火烧毁了塞拉皮斯神庙,约有三十万种手稿被毁。

海帕西娅是历史上第一位杰出的女数学家,他的父亲西翁(Theon)是当时著名的学者,精通数学。在父亲的熏陶之下,海帕西娅从小就显示出了非凡的数学才华,据说她在 10 岁时就知道应用相似三角形对应边成比例的性质去测量金字塔的高度。海帕西娅熟读了当时几乎所有大数学家的著作,如欧几里得的《几何原本》,阿波罗尼斯的《圆锥曲线》,丢番图的《算术》等,她还自己写书,为其中的一些著作作评注,可惜这

些书均已失传。

海帕西娅不仅擅长数学,而且熟谙哲学。她曾在亚历山大学院教授数学和哲学,听她讲课的学生来自欧洲、亚洲和非洲。她笃信理性是真知的唯一源泉,因而被基督教首领视为异端邪说。在基督教主教西里尔(Cyril)策划下,一场蓄谋已久的惨案终于发生了。公元415年3月的一天,正当海帕西娅坐着马车去学院讲课的途中,一群宗教狂徒跟踪而至,突然把她拉下马车,拖到附近一座教堂里,用极其残忍的手段将她杀害了。

公元529年,罗马帝王查士丁尼(Justinian)封闭了所有的希腊学校。古希腊时代完全终结,开始漫长的中世纪黑暗时期,此时大批学者逃往波斯,他们带走了一些希腊书稿,使得古希腊文明得以保存并传至阿拉伯,后来再传回欧洲。

罗马人是务实的。他们兴建了大量的工程项目,如高架引水渠道,宽广的大路、桥梁、宏伟的宫殿和公共建筑,却对数学不屑一顾,他们把数学家称为占星术家,以为数学会帮助他们计算预测未来的命运。

罗马人不懂得纯粹科学,在数学上没有什么重要成就,他们对数学的认识只“限定在对度量和计算有用的范围内”。

罗马人表示整数的方法就是大家熟悉的“罗马记数法”,这种记数法有七个基本符号:I(1), V(5), X(10), L(50), C(100), D(500), M(1000)。其他数字由这些基本符号的组合来表示。用这种方法记数和进行计算远不如位值制记数法方便,因此后来在数学上很少采用。不过由于罗马数字字形较为美观、庄重,现今仍常用于钟面记时及书稿中章节等分类作为符号。罗马人也懂得整数的计算,他们借助于手指、自制的各种计算工具和特别编制的数表来进行计算。

罗马人的分数都是以 12 的倍数做分母的,他们用特别的符号和文字来表示 $1/12, 2/12, \dots, 11/12, 1/24, 1/36, 1/48, 1/96, \dots$ 。这样做的原因可能是因为一年之中有 12 个月。

罗马人改进了日历,到凯撒时代(公元前 100~44 年)为止,罗马的基本年有 12 个月共 355 天。每隔一年加上 22 天或 23 天的一个闰月,这样平均每年有 $366 \frac{1}{4}$ 天到公元前 45 年正式采用的朱理安历(以凯撒的名字 Julius 命名的)改进为每年 365 天,并且每四年有一个闰年,这已与现今的日历相当接近。

从公元前 50 年左右起,罗马人编写了一些技术书籍,其中的基本内容都取材于希腊著作,这些技术书中最有名的要数维特维尔斯(Vitruvius)关于建筑方面的十本书。该书中称“数学上的三大发现”是边长为 3、4、5 的直角三角形,单位边长的正方形对角线长为无理量和阿基米德解决的金皇冠问题。此外,还提到人体各部分的比例,一些和谐的算术关系,以及计算弩炮功效的算术方法。

中世纪(约 5~15 世纪)的欧洲,在科学史上是一个漫长的“黑夜”。中世纪前期(约 5~11 世纪),欧洲处于混乱的战争局面和封建割据状态,生产停滞,经济萧条,科学文化发展缓慢,数学水平低下,罗马人只重实务,不重理论。基督教会主要关心精神生活,对物理世界缺乏兴趣,但是数学不可能在一个只重世务或只信天国的文明中滋长,只有在对物理世界的问题发生兴趣并能从抽象方面去思考的氛围中数学才能发展起来。

当时对于数学的仅有的“研究”是把幸存的希腊著作中的有关内容翻译成拉丁文。由于教会势力控制着整个欧洲,而教

会的官方语言是拉丁文,因而它就成了欧洲各国通用的语言以及科学及数学所用的文字。在做这方面工作中的人中,有一定影响的是一个罗马贵族的后裔波伊修(A. M. S. Boethius, 约 480~524)。他从希腊著作中选取了一些材料,用拉丁文编译了算术、几何和天文的初等读物,他写的《几何学》一书,内容只包括欧几里得《几何原本》的第一卷和第三、第四两卷中少量命题的摘编,以及这些命题在简单测量中的一些应用。他所写的《算术入门》主要是摘译自希腊尼可马修斯(Nichomachus)的同名著作,这本书作为标准的教科书在欧洲各国教会学校广泛使用,直至 12 世纪仍很流行。

公元 11 世纪,随着手工业和商业的发展,出现了新兴的城市并建立了一些大学。其中最早兴办的有法国的巴黎大学(1160 年)、英国的牛津大学(1167 年)、意大利的波伦亚(Bologna)大学(1088 年)。当时的大学和现代意义下的大学完全不同,它们在形式上虽然是独立的,但在实际上还要服务于教会的利益。大学里所学的数学内容极少,直到 15 世纪中叶,几何仅限于《几何原本》的前两卷,考试只限于第一卷,一般学生只能掌握第一卷的前 4 个命题。算术水平更低,一般大学生只会做加减法和乘法,不会用除法计算。

公元 12 世纪起,欧洲人通过贸易和旅游,同地中海地区和近东的阿拉伯人以及拜占庭的希腊人开始接触。此后十字军八次东征,在客观上促进了东西方文化的交流,中国的四大发明,阿拉伯的科学文化,相继传入欧洲,推动了欧洲文明的发展。与此同时,保存在阿拉伯人手中的希腊典籍又重返欧洲。希腊文明兜了一个大圈子:希腊人,罗马人,阿拉伯人,欧洲人。漫长的中世纪黑夜使得数学停滞不前,直至文艺复兴时代的来临,才给数学发展带来了生机。

第二节 阿拉伯数学、花拉子密与代数学

公元7世纪初,阿拉伯人默罕默德(Mohammed)创立了伊斯兰教。在强烈的宗教热情鼓舞下,分散在阿拉伯半岛上的原始部落和游牧民族迅速统一成一个强大的国家。此后数十年中,经过不断的武力扩张,他们征服了东起印度西至西班牙之间的大片土地,建立了一个横跨亚、非、欧三洲的庞大的阿拉伯帝国。我国史书上称之为大食国,到8世纪中叶,阿拉伯帝国分裂为两个独立的王国,东部王国以伊拉克的巴格达为首都,西部王国以西班牙的科尔多瓦为首都。

阿拉伯帝国社会安定,农业、手工业和商业都有很大的发展,同时也促进了科学文化的繁荣。阿拉伯的科学文化是在兼收并蓄多方面学术来源的基础上而繁荣滋长起来的。阿拉伯人邀请印度科学家前往巴格达工作,罗马帝王查士丁尼封闭希腊柏拉图学院时,许多学者逃到波斯,在那里传播希腊文明。阿拉伯人征服埃及后,收存了亚历山大里亚时期残留下来的希腊著作。阿拉伯君主还从拜占庭(东罗马帝国)那里收买过希腊书稿。数学史上所说的“阿拉伯数学”是指用阿拉伯文写成的数学著作。实际上,阿拉伯数学是由阿拉伯帝国统治下的各民族学者共同创造的。

阿拉伯数学的早期(8世纪中叶~9世纪)还处于翻译阶段。当时,许多各地来的学者云集巴格达的智慧宫及一些图书馆,把希腊手稿直接译成阿拉伯文,或把希腊著作的叙利亚文与希伯来文译本转译成阿拉伯文。被翻译过的有欧几里得、阿基米德、阿波罗尼斯、梅尼劳斯、海伦、托勒密和丢番图等希腊著名学者的数学和天文学著作,此外还有印度数学家和天文

学家的一些著作。在翻译过程中,许多文献被重新校订、考证、勘误、增补和注释。这样一来,许多古代数学遗产获得了新生。有些希腊原著后来失传,这些阿拉伯文译本倒成了欧洲人了解古希腊数学的主要来源,不少古希腊著作也正是通过其阿拉伯文译本才得以流传后世的。

经过一个半世纪的翻译工作,在消化吸收希腊和印度数学的基础上,从 9 世纪到 15 世纪,阿拉伯数学繁荣了 600 年,出现了一批有名的阿拉伯数学家及重要的数学成果。其中有两项最重要的贡献被万古传颂,一是阿拉伯人引用、改进并传播了印度数码和记数法,这就是当今世界通用的印度——阿拉伯数码。这段史实将在后文另述。另一是阿拉伯人提供了代数学这门学科的名称,这当中还有一段典故。

“代数学”一词来源于阿拉伯学者阿尔·花拉子密(Al-khowarizmi, 约 780~850)的一本数学著作。英国牛津大学博德利图书馆现收藏着完成于 1342 年的这部著作的阿拉伯文手抄本,其原名为《Al-jabr w' al muqabala》,Al-jabr 原意是“恢复”、“还原”的意思,根据书中的上下文来理解是指把方程一端负项移到方程另一边应变成正项,才能使方程恢复平衡。muqabala 意即“化简”或“对消”,就是把方程两边相同的项消去或合并同类项。因此,花拉子密的这本书全名应意译为《还原与对消的科学》。当这本书于 12 世纪被翻译成拉丁文时,书中的 Al-jabr 变成了 algebrae,后来人们又渐渐地把书名中的另一个词省略了。到 14 世纪,这门学科在欧洲被正式简称为“algebra”。17 世纪西方代数学传入我国后,有人曾把它译为“阿尔热巴拉”,这显然是 algebra 的音译。直到 1859 年清朝数学家李善兰与英国传教士伟烈亚力合译英国德·摩根(A·De Morgan)的《Elements of Algebra》时,才正式定

名为“代数学”。这就是“代数学”名称的由来。

花拉子密的《代数学》由三大部分组成,第一部分讲述现代意义下的初等代数。第二部分讨论各种实用算术问题。第三部分列举了有关遗产继承的各种类型的问题。第一部分是全书的精华,其中系统地研究了 6 种类型的一次或二次方程的解法,花拉子密把未知量称为“东西”或(植物的)“根”。现在我们常把一元代数方程的解称作“根”,正是来源于此。该书中的 6 种类型方程用现代的符号可表示为

$$ax^2 = bx, ax^2 = c, ax = c, ax^2 + bx = c, ax^2 + c = bx, bx + c = ax^2.$$

最令人感兴趣的是花拉子密在解二次方程时所采用的配平方法,例如,《代数学》中有一道例题:“根的平方与 10 个根的和等于 39 个 dirhem 阿拉伯钱币单位)。”花拉子密所给解法是:“取根数目之半,即 5,然后将其自乘得 25,用它加上 39 得 64,开平方得 8,再减去根的数目之半,余 3,这就是根”。用现代的符号来表示这个方程和解法就是:

$$x^2 + 10x = 39, x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = 3.$$

更令人叫绝的是花拉子密对上述的解法给出了两种几何的解释和证明。仍以 $x^2 + 10x = 39$ 为例,第一种证法(图 2-1)是在边长为 x 的正方形的各边上向外作边长为 x 和 $\frac{10}{4}$ 的四个矩形,再在四个角上补上边长为 $\frac{10}{4}$ 的四个正方形,得到一个边长为 $x+5$ 的大正方形。

第二种方法(图 2-2)更加简便:先在边长为 x 的正方形两邻边上各作边长为 x 和 $\frac{10}{2}$ 的矩形,再补上一边长为 $\frac{10}{2}$ 的正方形,同样可得到一个边长为 $x+5$ 的大正方形,在这两种情

况下,大正方形的面积为

$$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25. \text{ 而 } x^2 + 10x = 39,$$

$$\therefore (x+5)^2 = 25 + 39.$$

$$\text{从而 } x+5=8, \quad \therefore x=3.$$

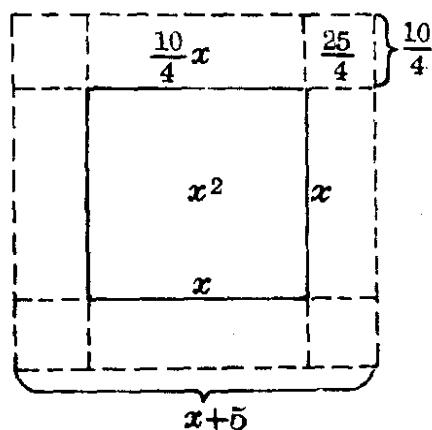


图 2-1

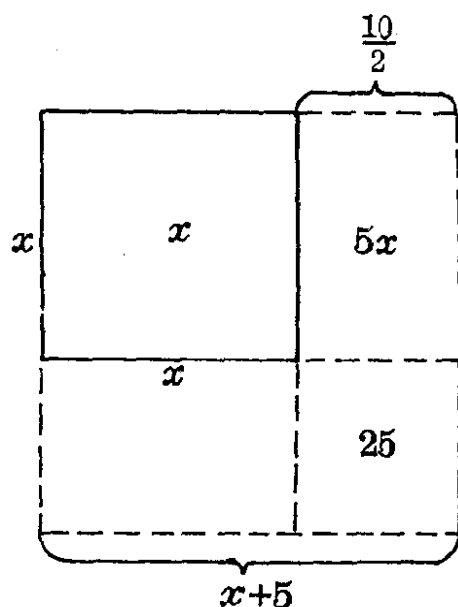


图 2-2

花拉子密对于每一种类型的方程都通过几个例子详尽地叙述解法步骤,从而深入浅出地揭示出解一次和二次方程的一般规律。他的这本《代数学》后来被译成拉丁文,成为欧洲沿用了几个世纪的代数学标准教科书。因此有人称他为“代数学”之父。

《代数学》存在着两个缺陷:一是不承认负数,解方程时只给出正根,这方面不如印度人;二是没有使用代数符号,全部内容都是用语言文字来叙述的,这比印度人甚至丢番图倒退了一步。

阿拉伯学者在数学上还有一些其他成就,如海雅姆(Omar Khayyam, 1044~1123)用求圆锥曲线交点的方法来

解一些类型的三次方程;巴塔尼(Al-Battani, 约 858~929)、维法(Abul-Wefa, 940~998)和埃丁(Nasir-Eddin, 1201~1274)建立了较系统的平面三角学和球面三角学,并制作了一些精度很高的三角函数表;卡西(Al-Kashi, ?~1429)对圆周率的计算精确到 17 位有效数字(首次超过祖冲之于 5 世纪创造的记录)等等。

总的说来,在欧洲数学处于低潮的中世纪,阿拉伯数学继承和吸收了希腊和印度数学的成果,在某些方面取得了一些新的进展,并在后来传往欧洲。虽然阿拉伯数学的创造性与深刻性远不如希腊数学,但它在世界数学史上处于承前启后、继往开来的重要地位。

第三节 中国隋唐和宋元时期的 数学和数学教育

隋唐时期,封建割据的战乱状态结束,社会稳定,生产发展,经济繁荣。由于土木工程、经济问题和天文历法的实际需要,推动了数学的进一步发展。唐代在数学上作出较大贡献的学者是王孝通和一行和尚。

王孝通是唐朝初年(7 世纪)的历算家,身世不详。他曾奉唐高祖之命校勘和修订历法,研究过《九章算术》和《缀术》(祖冲之父子著)等书。在用于解决实际问题时,他发现过去的算法有缺陷,于是创造了一些新的方法,写成《辑古算经》一书(约于公元 626 年)。

《辑古算经》共包括 20 道题,大体分为四类:第一类是天文问题,只有 1 题;第二类是土木工程中的数学问题,有 6 题;第三类是地窖和仓库的容积问题,有 7 题;第四类是勾股问

题,有6题。每道题都有答案和解题步骤,并有自注。书中的20道问题大多数较复杂,有的题目答案竟有27个之多。其中多数问题要用三次方程来解答,例如书中第15题,题意用现代语言叙述是:

“直角三角形中,勾(小直角边)与股(大直角边)之积为 $706\frac{1}{50}$,弦(斜边)比勾大 $36\frac{9}{10}$,求三边之长。”

王孝通根据直角三角形三边的关系,借助高度的恒等变形技巧,应用算术的方法得到了相当于下列三次方程的“开方式”(x表示勾):

$$500x^3 + 9225x^2 - 3377129 = 0.$$

然后解得有理根 $x = 14\frac{7}{20}$ (当时还不知道另有两个虚根)。从而求得勾、股、弦之长分别为 $14\frac{7}{20}$ 、 $49\frac{1}{5}$ 和 $51\frac{1}{4}$ 。

王孝通是如何解这些三次方程的,书中没有详述,只是列出方程后把各项系数用算筹依一定的次序排列起来,用“开带从立方”的方法来求解。可见王孝通当时已掌握了三次方程的数值解法,这在世界上是领先的。关于三次方程的解法,古希腊学者曾用几何方法来解,阿拉伯学者于11、12世纪发展了几何解法。直到13世纪意大利的斐波那契才给出了一个三次方程的数值解法,这比王孝通晚了约600年,《辑古算经》开创了三次方程数值解法的先河,后代中国数学家沿着这个方向发展了高次方程的数值解法,到宋元时代创立了举世闻名的天元术和四元术。

一行和尚原名张遂(683~727),法名一行、魏州昌乐(今河南省南乐县)人,是唐代著名的天文学家、数学家。据《旧唐书》记载:“一行少聪敏,博览经史,尤精历象”。他幼年家贫,勤

奋好学,很快就成为长安城里的青年学者。一行禀性耿直,不阿权贵,21岁那年,因不愿与武则天的侄子武三思结交而逃避到河南嵩山出家当了和尚,取法名一行。出家后仍刻苦学习天文学和数学,还辗转数千里,先后去浙江天台山和湖北玉泉山访师求学,终于成为全国有名的学者。

一行成名以后,受到唐玄宗的赏识,于公元717年应诏入京。在长安的十年中,他主要致力于历法改革,领导了著名的天文大地测量,与他人一起研制了“黄道游仪”和“水运浑仪”用于天文观测。在实测的基础上,编制了新的历法《大衍历》。

一行组织并领导了全国12个点的大地测量,测量结果汇集到长安,由他汇总计算。他利用河南测得的数据计算出地球子午线每度的长度最佳值为122.8公里,比现今测得的数据111.2公里只长11公里多。这是世界上第一次用科学方法实测子午线的数据。通过对测量结果的分析,一行还提出了5条理由来论证地球是球形的,这在当时也是很了不起的成就。

在编制《大衍历》时,需要计算太阳视行度数。以前,人们一直误认为太阳在黄道(即太阳在天空中视运动轨道)上视运动是匀速的,所以历法上把全年均分为24个节气。一行通过计算发现,太阳在黄道上的视运动速度是有规律地变化的。因此,他把隋代刘焯(544~610)创立的“等间距二次内插公式”推广到不等间距的情形,数学史上称为“张遂内插法公式”。

中国的数学教育有着悠久的历史。据典籍记载,周代就有了数学教育。例如《礼记·内则》称:“六年(六岁)教之数与方名(1~10的数与方位名称),… ,九年教之数日(天干与地支记日法),十年出就外傅(出外求师),住宿于外,学书计(语文

与计算)”。《周礼》中记载的小学教学内容为六艺:“礼、乐、射、御、书、数。”其中的“数”指的是九数,即后来的《九章算术》中的一些基本内容。可见周秦时代的数学教育是附在一般的文化教育之中的,内容多半是结合日常生活的数学基础知识。

④

两汉时代,《九章算术》问世,这部世界数学名著总结了我国公元前的全部数学成果,其中许多成就在世界上处于领先地位。16世纪前的中国数学著作大多遵循了《九章算术》的体例,我国古代的数学教育也一直以它作为基本教材之一。

隋朝统一全国以后,创立了科举制度,建立了全国最高学府——国子寺,并在国子寺里设立了明算学(相当于现今的数学系)。明算学内设算学博士(教师)两人,算学助教两人,从事数学教学工作,有学生80人。这是我国专门的数学教育的开始。

到了唐代,官办的数学教育有了进一步的发展,在唐朝的最高学府——国子监里设有明经、进士、秀才、明法、明书、明算六科。明算科内设算学博士两人,“掌教文武八品以下及庶人子为生者”(以教八品以下文武官员及老百姓孩子来谋生的人),还有算学助教一人。算学博士的官级很低,只有“从九品下”,而算学助教则没有品级。

唐初由于教学的需要,由科学家李淳风等人奉诏注释并审定了十部算书,作为明算科的教科书,数学史上称作《算经十书》,它们是:《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张邱建算经》、《周髀算经》、《五经算术》、《缀术》、《缉古算经》及《夏侯阳算经》,另外还有《数术记遗》和《三等数》两本供学生兼学。

唐初明算科的学制为七年,学生分两组学习,每组15人。第一组学习《九章算术》等八部算经,第二组学习其余两部较

6

难的：《缀术》与《缉古算经》。每部算经的学习年限都有具体规定。两组学生都兼学《数术记遗》和《三等数》。

学生学习期满后，要参加考试，明算科的考试也分两组进行，每组各出十道题。第一组除按《九章算术》出三道题外，其他七部算经各出一题，第二组按《缀术》出六题，《缉古算经》出四题。成绩的评定方法是，每组十道题中“得八以上为上，得六以上为中，得五以下为下”，并规定答对六题算合格。考试合格的人员送交吏部录用，授予九品以下的官级。

由上可见，唐朝已形成了一套比较完善的数学教育制度。后来随着贸易和文化交流的开展，中国的数学和教育制度传入朝鲜、日本等邻国。因此，朝、日两国的数学深受中国的影响，他们的数学教育制度和教科书原来基本上是采用中国的。

由于历代统治者对教育重视的程度不一样，唐代的数学教育并不稳定，可以说是兴废无常。唐初，人员较多，单国子监的书、算两科最多时就有师生 3260 人，可谓盛况空前，但到了唐朝中后期，有时明算科只有十多人，甚至完全停办，到宋元时代，官办的数学教育日渐衰落，而民间的数学教育却比较盛行。当时许多有名的数学家，如杨辉、李冶、朱世杰、郭守敬等，或设馆招徒，或隐居深山，或云游四方，传道授业，讲授数学。有的还自订教学计划大纲（如杨辉的“习算纲目”）或自编教材（如朱世杰的《算学启蒙》），培养了一批数学人才，推动了数学教育的发展。到了明清之际，数学教育日益衰落。读书人醉心于八股功名，愿意钻研数学的人，已属凤毛麟角了。

第四节 斐波那契、印度——阿拉伯数码

中世纪前期，欧洲数学处于停滞状态。曾经兴盛一时的希

腊文化,已被摧残殆尽,连欧几里得的《几何原本》已经没有拉丁文本在流传。可是东方的数学则处于蓬勃发展阶段,中国数学硕果累累,印度、阿拉伯数学也很繁荣兴旺。到了公元 11、12 世纪,由于贸易、旅游及战争等原因,促进了东西方间的科学文化交流。阿拉伯的学术著作陆续传入欧洲,激起了欧洲人学习东方科学文化的兴趣和热情。新的思潮开始影响欧洲当时的学术气氛。

公元 1085 年,基督教徒攻占了阿拉伯帝国的托莱多(西班牙城市,当时的阿拉伯文化中心之一)。许多欧洲学者纷纷涌入该城及一些其他阿拉伯文化中心去搜集学术著作和研究穆斯林学问。英国巴斯城的修士阿得拉德(Adelard,约 1090~1150)乔扮成学生,历尽艰难前往阿拉伯人控制下的叙利亚。科尔多瓦及意大利南部等地听讲,冒着生命危险获得了欧几里得的《几何原本》和花拉子密的天文表的阿拉伯文抄本,并把它们译成拉丁文传到欧洲。托莱多的大主教雷蒙德(Raimundo)创建了一所翻译学院,组织培养人才把希腊和阿拉伯的学术著作翻译成拉丁文。在众多的翻译家中,贡献最大的要数意大利人杰拉德(Gerard, 1114~1187),他参与从阿拉伯文译成拉丁文的著作达 80 多种,其中包括欧几里得的《几何原本》、托勒密的《大汇编》、花拉子密的《代数学》以及亚里士多德和海伦的著作、阿基米德的《圆的度量》等。尽管当时有些著作的译本质量并不太高,但由于阿拉伯人确实占有了几乎全部的希腊著作,欧洲人借这些译本得以传播、吸收和继承希腊和阿拉伯的文化财富,为中世纪后期及文艺复兴时期欧洲数学的发展奠定了基础,从这个意义上说,阿拉伯数学的历史功绩高不可没。

在传播东方文明并对中世纪欧洲数学作出重要贡献的学

者中首推杰出的意大利数学家斐波那契(Leonardo, Fibonacci, 约 1170~1250)。斐波那契出生于意大利的商业城市比萨,父亲经商。在父亲的影响下,从小就对商业算术发生兴趣,年轻时他曾到北非受教育,后来又游历了埃及、西西里、希腊和叙利亚等地,接触到东方的数学知识,回意大利后不久,就写成了名著《算盘书》(1202)。虽然该书主要编译自阿拉伯和希腊的著作,但它是中世纪欧洲最重要的数学著作,被欧洲各民族当作学校的标准教材达 200 年之久。

《算盘书》是关于算术与初等代数的著作,书中主要讲述了整数与分数的四则运算,平方根与立方根的计算法,线性方程和二次方程的解法,以及商业应用问题、趣味问题的解法等。

《算盘书》的最大功绩是向欧洲人介绍了印度—阿拉伯数码。斐波那契熟悉各国的算术系统,他发现印度—阿拉伯数码的符号和记数法是最优越的。该书一开头写道:“印度的九个数字是 9、8、7、6、5、4、3、2、1,用这九个数字与阿拉伯人称为零的符号 0,任何数都可以表示了”。因为阿拉伯文是从右向左写的,所以上述九个数字也是倒写的。虽然当时在欧洲已经多少知道一点阿拉伯记数法和印度算法,但只限于在修道院里,一般人还是用罗马数字而且不知用零,计算方法也十分笨拙。《算盘书》使印度—阿拉伯数码得以推广和流行,对于改变欧洲数学的面貌起了极为重要的作用。

在《算盘书》中,记载了一个特别有趣的问题:“如果每对大兔每月能生育一对小兔,而每对小兔经过两个月能长成大兔,那么由一对小兔开始,一年后可繁殖成多少对兔子?”这个问题的解法引出了著名的斐波那契数列:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ……

这个数列的特征为

$$u_1 = u_2 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3).$$

后人求出了它的通项公式为

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

一个正整数数列的通项竟要用无理数来表示,这是一个令人十分惊异的结果。

后来人们陆续发现了斐波那契数列的许多重要性质和有趣的应用。特别是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} (\approx 0.618)$, 这正是被著名天文学家开普勒誉为几何珍宝之一的“黄金比”, 而每个 $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ 都是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的渐近分数, 在优选法中得到应用。近年来, 关于斐波那契数列的研究仍方兴未艾, 硕果累累。1963年, 美国一些数学家成立了斐波那契协会, 同时创办了《斐波那契季刊》, 专门刊载有关这个数列性质的新发现。该杂志头三年发表的研究文章就接近一千页。

斐波那契的另一项出色成果是证明了三次方程 $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ 的根不能通过尺规作图来得到, 从而第一次表明数系所含的数超出了希腊人“以尺规能作出为准则”所限定的数的范围, 即证明了欧几里得《几何原本》第十卷中对无理量的分类并不包括一切无理量。他还求出这个方程实根的近似值 $x \approx 1.3688081075$, 精确到9位小数。这个结果记录在他的著作《数学花絮》中, 可惜没有说明解题的方法与步骤。他认为负数是有意义的, 但在解方程时仍然舍弃负根。

在数学史上, 许多国家和民族发明了各种不同的数字符号(数码)和记数法。随着历史的前进, 其中多数数码现已废弃不用, 有些只在一定范围内某些场合使用。当今国际上通用的

数码就是我们熟知的阿拉伯数码。确切地说,应称作印度—阿拉伯数码。这种数码的演变和流传,有一段漫长而曲折的历史。

印度最早的数字记号可以追溯到婆罗米(Brahmi)文字,它形成于公元前 7、8 世纪。目前在寺庙的墙壁、石碑及铜片上发现的公元前 3 世纪时的数字写成下列形状(下面一行指它们相当于现在的数字):

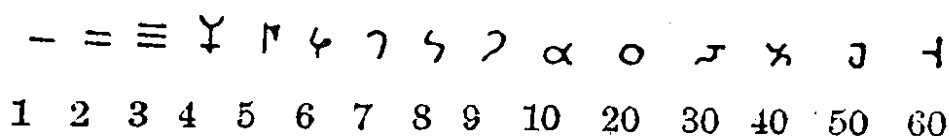


图 2-3

当时还没有零的记号。也没有采用位值记数法。

随着位值记数制的产生和记数的需要,逐渐产生了零的记号。最初用空一格表示零,后来采用小点表示。到公元 9 世纪时,印度数码演变成:

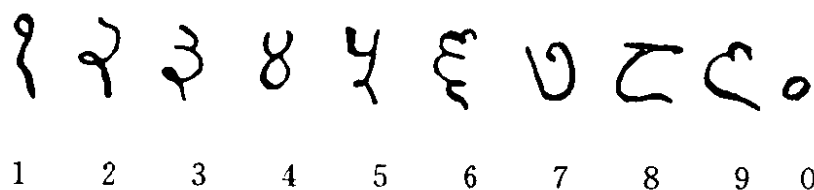
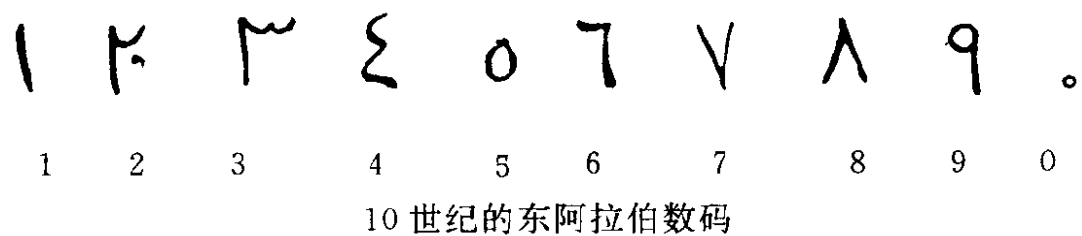


图 2-4 9 世纪的印度数码

773 年,一位印度学者把印度的天文学著作带到阿拉伯的宫廷,后来被译成阿拉伯文。这样,印度数码开始传入阿拉伯国家。花拉子密的著作《印度数字的算法》促进了印度数码的传入。在这部著作中,他用阿拉伯文叙述了十进位值制记数法及其运算法则。花拉子密还特别提出零在这种记数法中的用法及其乘法性质。

印度数码传入阿拉伯时,印刷术还没有发明,书籍全用手抄,字体因人而异,出入很大,后来逐渐形成了东阿拉伯数码和西阿拉伯数码两种形式:



10 世纪的东阿拉伯数码

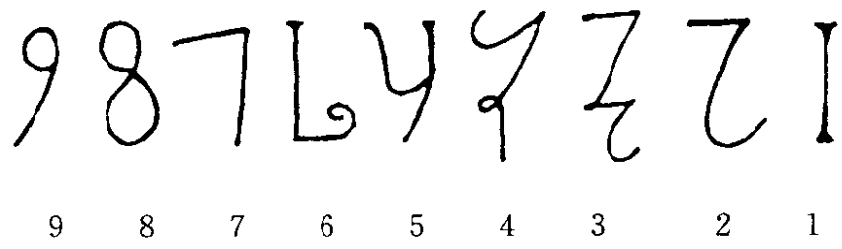


图 2-5 976 年的西班牙数码
(西阿拉伯数码)

12 世纪起,欧洲人开始将大量阿拉伯文的数学著作编译成拉丁文。13 世纪初,斐波那契在他的名著《算盘书》中首先向欧洲人介绍印度——阿拉伯数码。此后,这种数码就开始逐渐在欧洲流传。在欧洲人的印象中,这些数码来自阿拉伯国家,所以称之为阿拉伯数码,这个名称一直沿用至今。

14 世纪,中国的印刷术已经传到欧洲。到 1480 年,英国出版的印刷书籍中,数码已相当接近现代的写法:

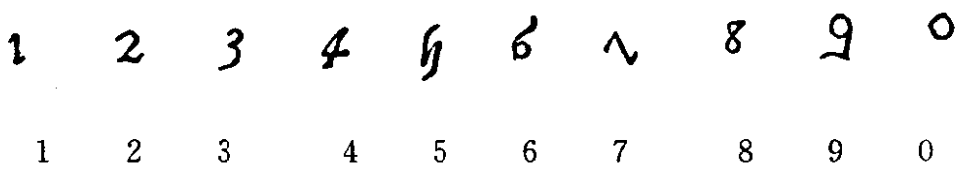


图 2-6

在我国,印度—阿拉伯数码最早于 1892 年出现在由美国

传教士狄考文(Rev. Calvin W. Mateer)和邹立文合译的《笔算数学》中,不过当时的数目字是竖排的。后来由于封建保守思想的束缚,曾一度改回用汉字“一、二、三、…”。直到辛亥革命后,印度—阿拉伯数码才在我国正式通行。

第五节 秦九韶、贾宪三角形、杨辉

宋元时代(960~1368),手工业如冶炼、纺织、陶瓷等都已初具规模,土木工程和水利工程达到了较高的水平,商业和外贸比较兴旺,科学技术也很繁荣。古代四大发明中有三项——火药、指南针和活字印刷术诞生于这一时期。生产和经济的发展对数学提出了新的课题和更高的要求。中国传统数学的发展在宋元时代形成了高峰,特别是在代数方面,取得了一系列世界第一流的成果。这一时期,数学家人才辈出,其中最著名的就是“宋元四大家”:秦九韶、杨辉、李冶、朱世杰。

秦九韶(1202~1261),字道古,自称鲁郡人,实际生于四川。青少年时代,因为父亲任南宋临安府(今杭州)的秘书少监,他随父同行,有机会去掌管天文历法的太史局去学习天文和数学知识,同时在数学上又得到“隐君子”的指点和教诲。后来,他曾在四川、湖北、安徽、建康(南京)等地为官。其间,他仍坚持潜心钻研数学。他总结了自己长期研究所积累的数学知识和创造性的成果,于1247年写成了传世名著《数书九章》。

《数书九章》共18卷约20万字。书中搜集了与当时社会生活密切相关的81个数学实际应用问题,按性质分为9类,每类9题。这9类是:大衍、天时、田域、测望、赋役、钱谷、营建、军旅和市物。

《数书九章》继承了《九章算术》的体例,采用应用题集的

形式,但其中问题的复杂程度和解题水平均高于以往的著作,它代表了当时中国乃至世界中世纪数学的最高成就。美国哈佛大学科学史家萨顿(Sarton)曾作出极高的评价:“秦九韶是他那个民族、他那个时代、并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一。”

《孙子算经》中提出了“物不知其数”问题(参见第一章第9节)并给出了解答。秦九韶在数学上的最大贡献就是把这个问题和解法进行了推广,得到了“孙子定理”(国外称作“中国剩余定理”),并创立了“大衍求一术”,从理论上彻底解决了一次同余式组的一般解法。

孙子定理用现代数学的形式可表示为

设 m_1, m_2, \dots, m_k 是 $k(k \geq 2)$ 个两两互质的正整数, $m = m_1 m_2 \cdots m_k = m_1 M_1 = m_2 M_2 = \cdots = m_k M_k$ 。则同余式组 $x \equiv b_1 \pmod{m_1}, x \equiv b_2 \pmod{m_2}, \dots, x \equiv b_k \pmod{m_k}$ 的解是 $x \equiv M'_1 M_1 b_1 + M'_2 M_2 b_2 + \cdots + M'_k M_k b_k \pmod{m}$, 其中 $M'_1 M_1 \equiv 1 \pmod{m_1}, M'_2 M_2 \equiv 1 \pmod{m_2}, \dots, M'_k M_k \equiv 1 \pmod{m_k}$ 。

孙子定理只给出了一次同余式组解的形式,而没有求解计算过程中最关键的步骤——求乘率 M'_i 的问题。当题目的数字比较简单时,用观察或试验的方法就可以求出乘率。如果数字较大,同余式的个数又多,仅凭观察或试验就难以奏效了。秦九韶发明了用辗转相除法求乘率的一般方法,这一步算法称为“大衍求一术”。此外,秦九韶还把孙子定理推广到模数 m_1, m_2, \dots, m_k 未必两两互质的情形。

在西方,直到18世纪,瑞士的欧拉和法国的拉格朗日才对同余式问题进行系统的研究。德国的高斯于1801年在《算术探究》一书中提出了解决这类问题的方法——剩余定理,并给出了严格的证明。1852年,英国传教士伟烈亚力把“物不知

其数”问题及解法传到欧洲,并介绍了秦九韶的大衍求一术。1876年德国数学史家马蒂生(L. Matthiessen)指出孙子定理及大衍求一术与高斯的理论一致。当时德国的著名数学家M. 康托尔(M. B. Cantor)高度评价了大衍求一术,并称秦九韶是“最幸运的天才”。此后,孙子定理就被西方人称为“中国剩余定理。”

秦九韶的另一项成果是得出了“三斜求积公式”。《数书九章》卷五第2题题意是:已知三角形地块的三边长分别为13步、14步、15步,求它的面积。把秦九韶的解法用现代的符号表示,就是:设三角形的三边长分别为 a 、 b 、 c ,则面积

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}.$$

这就是秦九韶的三斜求积公式,它与古希腊的“海伦公式”

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, p = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ 是等价的。}$$

在高次方程的解法方面,秦九韶总结改进了北宋数学家刘益和贾宪的解法,创立了正负开方术,即求高次方程正根的一般方法,并且给出了求方程近似根的方法,这与英国数学家霍纳(W. Horner)1819年创立的霍纳法基本上一致。此外,秦九韶改进了《九章算术》中解方程组的“直除法”,提出了“互乘相消法”与“代入消元法”,这与现今解方程组的方法完全相同。秦九韶的这两项成就在世界上都处于领先地位。

宋代数学在向高深发展的同时,简算法、数学歌诀、初等级数和纵横图等也得到了很大的发展和普及。南宋末期的数学家兼数学教育家杨辉就是这方面工作的杰出代表。

杨辉,字谦光,南宋末(13世纪)钱塘(杭州)人,生平不详。杨辉一生著述甚丰,计有五种21卷,它们是:《详解九章算法》12卷(1261)、《日用算术》2卷(1262)、《乘除通变本末》3

卷(1274)、《田亩比类乘除捷法》2卷(1275)、《续古摘奇算法》2卷(1275)。

杨辉的著作有两个主要特点。其一是深入浅出,文笔流畅,图文并茂,便于教学和民间流传;其二是广泛征引了前代数学典籍精华,以致一些数学家的原著虽已失传,但其主要内容通过杨辉的书得以保存下来。

杨辉最重要的著作是《详解九章算法》。为了使《九章算术》便于自学,杨辉对该书的246个问题中较难的80题作了详解,并增添了“图解、乘除算法和纂类”三卷。“详解”包括三个方面:一是“解题”,即解释题意、名词术语,校勘文字,并对题目作出评注;二是“细草”,即详细的解题过程及必要的图示;三是“比类”,即增选与原题算法相同或类似的例题进行对照分析。“纂类”是把《九章算术》中的全部问题按解题方法由浅入深的顺序重新整理分类。

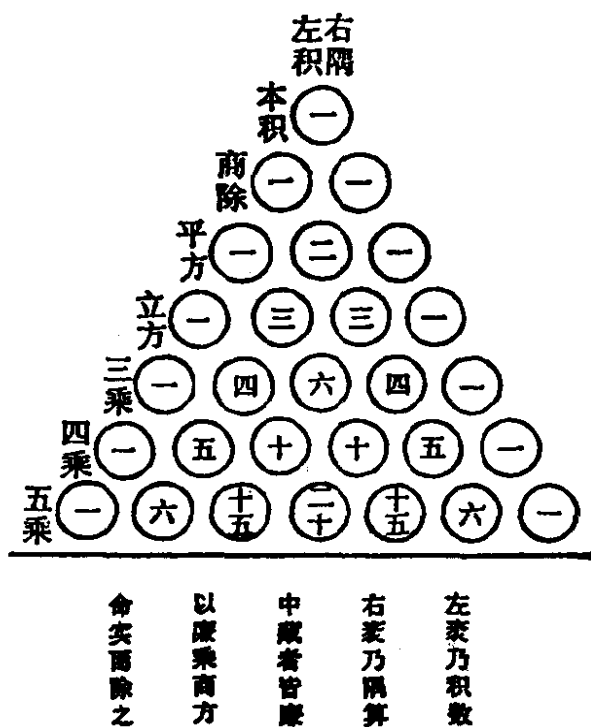


图 2-7

在《详解九章算法》中载有一张珍贵的图形——“开方作法本源”图(图 2-7)。根据杨辉自注,此图“出《释锁算书》,贾宪用此术”。就是说,这张图是贾宪(11 世纪)创造的,原载于《释锁算书》(已失传)中,这张图实际上是一个二项式展开式的系数表,它包括了 0 次到 6 次二项式的全部系数。这些展开式用现代数学符号表示就是:

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=a+b$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

表中的系数具有一定规律,每一行比上一行多一个数,每行除左右两个“一”外,每个数都是其“肩”上两个数之和。

因此这个表可以这样继续往下造。后来,元朝的朱世杰把它扩展为“古法七乘方图”(图 2-8),载于《四元玉鉴》一书中。

贾宪制作这张表进行开方运算,因其形似三角形,因此我们称之为“贾宪三角形”。欧洲人一般称它为“帕斯卡三角形”,认为是法国科学家帕斯卡(B. Pascal, 1623~1662)首创的。近年来,国外也逐渐承认这项成果属于中国,有些数学史书上开始称它为“中国三角形”(Chinese triangle)了。

杨辉在数学教育方面也有重要贡献。他特别重视数学的普及教育,亲手编写了多种教材并制定出详细的教学计划。在教学安排上,他强调由浅入深,循序渐进。在《乘除通变本末》一书中,他为初学者制订了“习算纲目”,列出了学习内容,先后顺序及进度安排等,这是中国数学教育史上的一个重要文献。

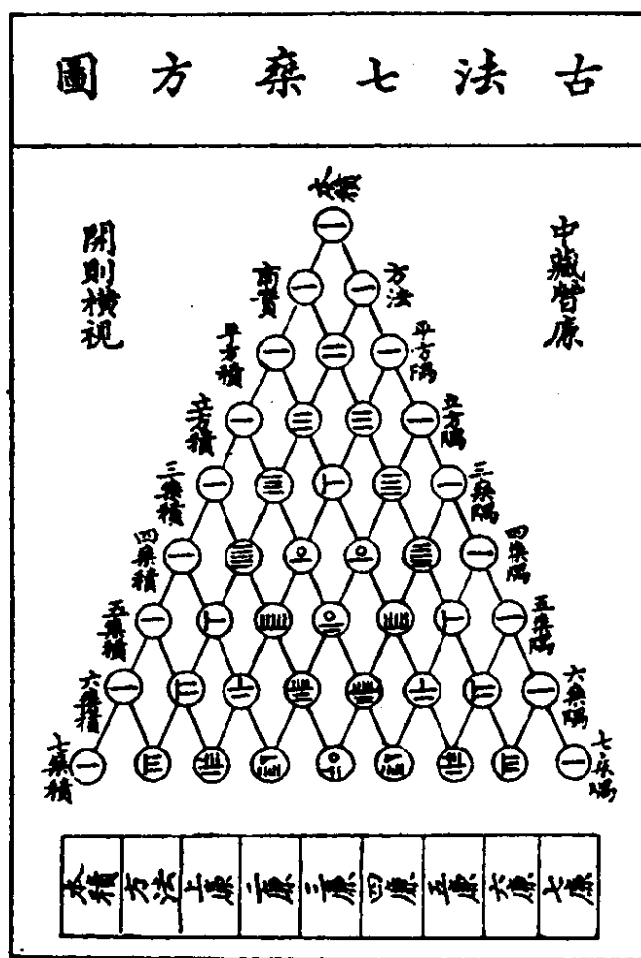


图 2-8

杨辉很注意数学在实际中的应用。他在《日用算法》中提出：“以乘除加减为法，称斗尺田为问；用法必载源流，命题须责实有”。要求数学教学的内容必须联系实际，应以社会实践中提出的计算问题为主。这正是中国古代数学的优良传统之一。

在教学方法方面，杨辉注意深入浅出，直观形象，他很注意讲清题意，在《详解九章算法》中加了“解题”一项，要学习者“全要认题之主意”，避免误解题意而出错。在该书中还特意增加了一卷图形，有些题目既有“题图”，又有“法图”，直观形象，

让人一目了然。另一方面,他又注重引导与启发,他说:“好学君子自动触类而考,何必尽传”。

在学习方法上,他提倡熟读精思,融会贯通。他主张学习要在广博的基础上深入,对各种算法应分门别类地仔细钻研,消化理解并广泛熟悉它们的各种应用,反对死记硬背。

对于培养计算能力,杨辉很强调要“多练”。每个学习单元他都规定要完成一定数量的练习,认为这样可以“庶久而无失念”。他对做练习与学习数学基础知识的关系有独到的见解:“夫学算者题从法取,法将题验,凡欲明一法,必设一题”。他还要求习题应具典型性,起到“举一(例)而三隅反”的作用。

杨辉治学严谨,在教学上一丝不苟。他对学习中的细小环节也不放过,特别是容易忽视或出错之处,他在书中都反复强调,并列为学习的重点。

作为我国古代卓越的数学教育家,杨辉提出的这些教育原则和主张至今仍有积极意义。

第六节 天元术和四元术

我国古代很早就知道许多实际问题可归结为解方程。《九章算术》中辑录了大量一次方程组 and 一元二次方程的问题。唐代学者王孝通已经会用高次(主要是三次)方程来解应用题。但当时都比较重视特定方程(组)的具体解法研究,至于如何建立这些方程(组),求解的一般原理,则很少涉及。因而,建立一种关于布列方程的一般方法,就成了后来数学发展的迫切需要。

大约在 13 世纪前后,一种关于设立未知数布列方程的一般方法——天元术就应运而生了。最初的关于天元术的著作

已经失传,创作者和年代难以详考。流传下来的内容较详细的最早记载天元术的著作是李冶(1192~1279)的《测圆海镜》12卷(1248)和《益古演段》3卷(1259)。

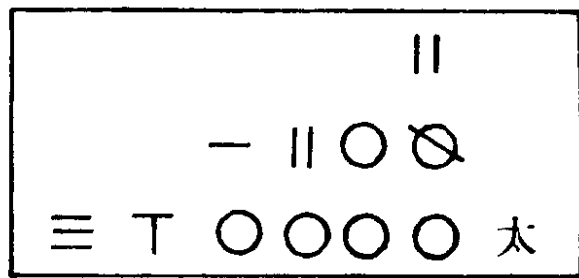
《测圆海镜》所研究的是有关“勾股容圆”的问题。即已知直角三角形的一些边及有关线段的长或关系求内切圆或旁切圆的直径之类的问题。书中给出“识别杂记”692条,每条相当于一个定理,作为列算式的依据。李冶在前人研究的基础上,对勾股容圆问题进行了推广和演变,共编拟出170个问题。《益古演段》一共收入64个问题,大多是各种平面图形面积关系的问题。在解决这些问题的过程中,李冶系统地应用并发展了天元术。

天元术与现今代数中的列一元方程解应用题的方法基本上一致。先是“立天元一为某某”,相当于现在的“设 x 为某某”(天元就是未知数 x);接着根据问题给出的条件列出两个相等的多项式;再通过所谓的“同数相消”,把这两个多项式相减,得到一个一端为零的方程。

在天元术中,用算筹来记多项式的系数。起初,每一项系数旁都用一个字来表明该项的名称,后来李冶简化了表示的方法,只在一次项旁记上一个“元”字。或在常数项旁记上一个“太”字。在《测圆海镜》中,各项系数从上到下按降幂排列。例如,筹式(如图)相当于方程 $2x^2 - 1200x + 360000 = 0$ (筹式中打上斜杠的系数表示负数)。

下面以《测圆海镜》卷三第四题为例来说明李冶

的天元术。题目原文是:“假令有圆城一所,不知周径。或问甲



出西门南行四百八十步,乙出东门直行一十六步望见甲,问径几何?”

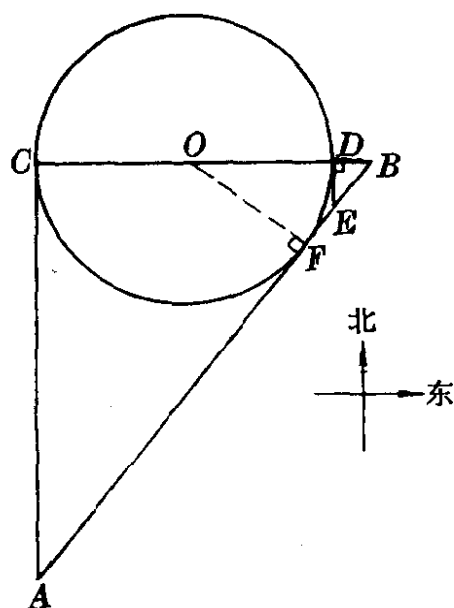


图 2-9

为便于理解,现将原书中的主要解答过程用现代的语言符号表述如下:如图 2-9 所示,设圆城直径为 x (立天元一为圆城径),在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,有 $CB = x + 16$,筹式为:

		元
—	┐	

因 $\text{Rt}\triangle ABC \sim \text{Rt}\triangle EBD$, 有 $DE \cdot CB = DB \cdot AC = 16 \times 480 =$

7680, 筹式为:

┐	┐	≡	○	太
---	---	---	---	---

又 $OF^2 = AF \cdot FE$, 即 $\left(\frac{CD}{2}\right)^2 = AC \cdot DE$. 两边同乘以 $4CB$, 得 $CD^2 \cdot CB = 4AC \cdot DE \cdot CB = 4 \times 480 \times 7680 = 14745600$, 将此数置于左旁。而 $CD^2 \cdot CB = x^2(x + 16) = x^3 + 16x^2$, 筹式为:

—	┐	
	○	元

把该式与左边 14745600 相减, 得 $-x^3 - 16x^2 + 14745600 = 0$, 筹式为:

		┐	
		—	┐
			○ 元
—		┐	
		≡	┐
			○ ○

解此三次方程,得 $x=240$,即圆城的直径。

13 世纪中叶起,天元术的方法被发展推广到多元高次方程组,于是先后产生了二元术、三元术和四元术。四元术的创始人是 13、14 世纪间的杰出数学家和数学教育家朱世杰。

朱世杰,字汉卿,寓居燕山(今北京附近)。曾以数学名家的身份周游各地 20 余年,“四方之来学者日众”。后来到扬州时,“踵门而学者云集”。朱世杰在继承前人数学成果的基础上,加以总结和创新,取得了重大的成就,把我国传统数学的发展推向了顶峰。朱世杰的数学著作有《算学启蒙》(1299)和《四元玉鉴》(1303)。

《四元玉鉴》是一本论述垛积术(堆积物体计数方法)和四元术的杰作。全书有三卷分 24 门共 288 个问题。书中有 50 多道关于多元高次方程组的应用问题,朱世杰在解答的过程中,创造了四元术。

四元术是用筹式来表示多元整式方程的方法,最多可有四个未知数,分别称作天、地、人、物(相当于 x, y, z, w)。在表示方程时,常数项放在中央,其右边记上一个“太”字。天元的各次幂依次列于太项之下,地元和地元的各次幂依次列于太项之左,人元和人元的各次幂依次列于太项之右,物元及它的各次幂依次列于太项之上。两个不同元及它们的幂的交叉积相应地列于左下、右下、左上、右上四个角内。

为简便起见,现以《四元玉鉴》卷首中的“三才运元”一题为例来说明用四元术解题的大致过程。原题为:“今有股弦较除弦和和与直积等,只云勾弦较除弦较和与勾同,问弦几何?”

这是一个三元问题,朱世杰解法的主要步骤及其现代语言符号解释如下:

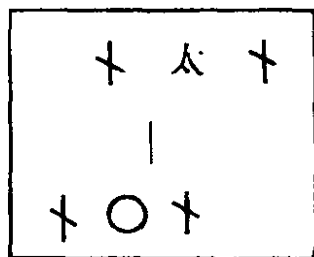
立天元一为勾(x),地元一为股(y),人元一为弦(z)。“股

弦较”是股与弦之差,即 $z-y$,“弦和和”是弦与勾股和的和,即 $x+y+z$,直积指勾股之积 xy ,于是有“今式”: $(x+y+z) \div (z-y) = xy$ 。“勾弦较”是勾与弦之差 $z-x$,“弦较和”是弦加上勾股之差的和,即 $z+y-x$,这样,“云式”为: $(z+y-x) \div (z-x) = x$,把“今式”和“云式”整理再加上勾股定理,得三元方程组:

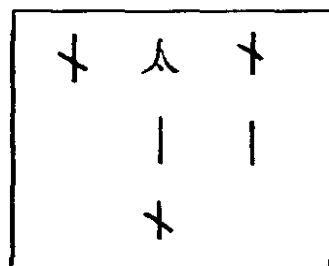
$$\begin{cases} -xy^2 + xyz - y - x - z = 0, & \text{("今式")} \\ -y - x^2 + x + xz - z = 0, & \text{("云式")} \\ y^2 + x^2 - z^2 = 0. & \text{("三元之式")} \end{cases}$$

在《四元玉鉴》中,这个方程组是用下面三个筹式表示的。

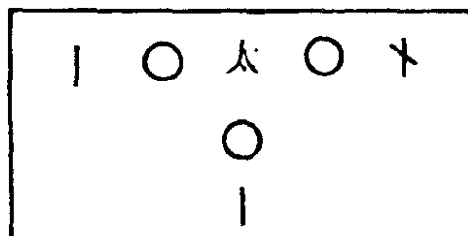
“今式”:



“云式”:



“三元之式”:



朱世杰应用复杂的消元方法得到一个四次方程:

$$z^4 - 6z^3 + 4z^2 + 6z - 5 = 0.$$

解此方程,得正根 $z=5$,这就是弦的长。

应用四元术来解高次方程组时,消元的过程往往非常繁琐,最后得到的一元高次方程也很复杂,可见朱世杰对方程的理论造诣精深,他的解题技巧十分娴熟。用消元法解高次方程组,在西方直到 1779 年才在培祖(Bzout, 1730~1783)的著作中首次出现。

朱世杰在数学教育方面也作出过重要贡献。他周游四方20多年间,一面刻苦钻研数学,一面广招门徒,传授数学。他自编《算学启蒙》作为教材,此书涉及到了当时的主要数学基础知识及其在日常生活和商业中的应用,内容广泛全面,编排循序渐进,叙述深入浅出,是一部很好的数学启蒙教材。该书流传甚广,曾传入日本、朝鲜,并被朝鲜定为数学教材。《算学启蒙》中的“明正负术”将古代正负数加减法则中的除字改为减,益字改为加,这与现代的名称相同。书中的“明乘除术”中有“同名相乘为正,异名相乘为负”及“同名相除为正,异名相除为负”。这是我国正负数乘除法法则的最早记载。

李冶发展总结的天元术和朱世杰创立的四元术实际上已是一种半符号式的文字代数,它比古希腊和印度数学中使用缩写文字记号来记述方程的简字代数向前迈进了一步。这是我国对世界数学的一大贡献。到16世纪,韦达等人较系统地引入了字母表示数及常用的数学符号,符号式代数才逐渐建立起来。

第七节 文艺复兴时期的数学

从15世纪初到17世纪初的200多年间,称为欧洲历史上的文艺复兴时期。“文艺复兴”原指古典希腊、罗马文艺和学术在欧洲各国的复兴,实质上是一场深刻的资产阶级民主革命。由于资本主义生产方式的形成和生产力的发展,引起了宗教改革和政治变革,因而促成了思想的大解放和文化、艺术、科学的大发展,也给这一时期及其后的数学发展提供了推动力。

文艺复兴时期,欧洲数学开始走出中世纪的黑夜,在三角

学、代数方程论、商业数学和计算技术等方面取得了一些令人瞩目的成就。

三角学在古代希腊已初步建立,后来经过印度和阿拉伯学者的发展,初步形成了三角学体系。在欧洲,对三角学作出重要贡献的是德国数学家缪勒(Müller, 1436—1476),人们习惯称他为雷琼蒙塔努斯(他出生地哥尼斯堡的译音)。缪勒最重要的著作是《三角全书》,写成于1464年,直到1533年才出版。

《三角全书》共5卷,前2卷讲平面三角,后3卷讲球面三角。书中对已知三个条件解三角形的问题特别重视。例如第二卷命题12:已知一条边、该边上的高和另两条边的比,解此三角形。

缪勒在书中准确指出,在球面三角中,不仅可用三角形的三边确定它的三个角,而且可以用三角形的三个角确定它的三条边。这是球面三角不同于平面三角的主要之处。他还给出了球面三角的正弦定律:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}。$$

和边的余弦定律:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A。$$

该书中还讨论到一个新颖的极值问题:天花板上挂下一根竖直的杆子,杆长10英尺^①,下端离地面4英尺。在地面上求一点(或点的轨迹)使其对杆的视角最大。这是数学史上第一次明确讨论极值的问题。

《三角全书》中只用到正弦函数和余弦函数,因而使问题

^① 英尺作为法定计量单位已被取消。
1英尺=0.3048米。

的研究具有一定的局限性。尽管如此,该书是欧洲第一部系统论述三角学的著作,它标志着三角学最终脱离天文学而成为一门独立的数学学科。

文艺复兴时期,代数方程论取得了长足的进展,其中最重要的是三次、四次方程的公式解法。

一次、二次方程的一般解法早已解决。对于三次、四次数字系数的具体方程的解法研究,在我国 13 世纪已达到很高水平。一般三次方程的代数解法首先是由自学成才的意大利数学家塔塔里亚(Tartaglia, 1499~1557)发现的。后来他的解法被同胞卡丹(G. Cardano, 1501~1576)骗去。卡丹是米兰有名的医生和学者,也是一个赌徒。1545 年,卡丹出版了他的数学专著《大术》,书中首次公布了三次方程的一般解法。卡丹以 $x^3+6x=20$ 为例,给出了 $x^3+mx=n$ 型方程的公式解法。其解法实质用现代的符号表示大致如下:考虑恒等式

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3。$$

若选取 a, b , 使得

$$3ab=m, \quad a^3-b^3=n,$$

则 $x=a-b$ 。由上面两方程可解得

$$a=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}},$$

$$b=\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}。$$

于是可得原方程 $x^3+mx=n$ 的解为

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}。$$

对于卡丹的例题 $x^3+6x=20$, 他所得的解为

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

至于一般的三次方程

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0,$$

只须作变换 $y = x - \frac{a}{3}$, 就可化为上述形如 $x^3 + mx = n$ 的方程来解了。

在卡丹的《大术》中还载有他的学生费拉里(Ferrari)首先发现的四次方程的一般解法, 这里不予介绍了。

关于高于 4 次的一元方程代数解法的理论研究, 直到 19 世纪初才取得重大突破, 由两位天才的青年数学家阿贝尔和伽罗瓦彻底解决, 这将在第三章中予以介绍。

文艺复兴时期, 由于生产和商业发展的需要, 数学开始从学者们的高墙深院内走向社会, 以“商业算术”为代表的实用数学迅速发展, 数学教育得到广泛普及, 产生了人人可学的“大众数学”。这一时期在欧洲出版的算术普及读本不下 300 种。

西方国家第一部印刷本的算术书于 1478 年诞生于意大利的特雷维索城, 名为《特雷维索算术》, 作者不详。这本书的内容多半是商业算术, 包括印度—阿拉伯数字的写法和算法, 合股和换货的计算法以及一些数学游戏。

在德国, 最有影响的算术书是由著名计算师里泽(Adlam Riese, 1492~1559)编写的。他广招学生, 写了一系列教材。有一本算术教材(1522)共 4 篇: 算盘计数, 笔算, 商业算术, 测量面积和体积。里泽精通数学。有一次他和一个绘图员比赛, 看谁用圆规直尺画出的直角多而快。绘图员用通常的作垂线的方法来画, 里泽在半圆中画直角, 结果里泽轻而易举地获胜。里泽的著作十分普及并享有崇高的声誉, 以致于今天德国“根

据里泽的算术书”这一成语仍被用来表示正确的计算。

16 世纪的英国,出了一名著名的数学教育家雷科德(Robert Recorde, 1510~1558)。他曾在牛津、剑桥受过教育,写了一系列的数学教科书,是数学写作方面英国学派的奠基人。他的最负盛名的算术教本称为《艺术的基础》(Ground of Arts, 1542)。

雷科德的数学著作都用英文写成(过去只能用拉丁文写),而且采用师生会话的生动形式,使人倍感亲切。这是文艺复兴时期人文主义思潮在数学教育上的反映。雷科德写成的算术、几何、代数三本书,奠定了以后几百年间数学课程的基本内容。尽管具体内容有所改动,但其基本格局至今仍保留着。这一基本模式传遍了全世界,对人类的教育产生了很大的影响。

计算技术的发展也是文艺复兴时期数学的重要成就之一。有的数学史家把印度—阿拉伯记数法的通用,十进小数的使用和对数的创造称作这一时期计算技术的三大发明。

印度—阿拉伯记数法由斐波那契传入欧洲,经过几百年的传播和演变,到 16 世纪前后已经定型并在欧洲普遍使用。众所周知,这种记数法采用优越的位值制,只用 0 到 9 十个数码就可以表示一切数,其形式简明,书写方便,计算简捷。卡尔·马克思称赞说:“这是最妙的发明之一”。

我国不仅是世界上最早采用十进制的国家之一,而且也是最早使用十进小数的国家。在欧洲,把十进小数的发明归功于荷兰数学家斯蒂文(S. Stevin, 1548~1620)。他在 1585 年发表的《十进制算术》中,提倡用十进小数来书写分数,并用小数形式进行计算。他把 5.912 写成 5①9①1②2③的形式。以后又出现别人设计的其他书写小数的形式。直至今今天,小数点

的记号在英、美和我国为圆点,而在法、德等国为逗号。

文艺复兴时期的主要数学成就除了上面提及的三角学的系统化,三次和四次方程的解法,商业算术的普及和计算技术的发展外,还有两项重大的成就,这就是符号代数的建立和对数的发明,我们将在下一节和第三章分别予以介绍。这一时期的数学成就为 17 世纪数学的飞跃发展创造了有利条件。

第八节 数学符号 $+$ 、 $-$ 、 $=$ 等,韦达

用字母和符号表示数及其运算或关系是代数学的一个基本特征。建立一套简明有效的符号体系,可以使代数书写表达更加方便,运算过程更加清晰,推演思路更加精炼。这是近代数学得以迅速发展的必要前提,也是近代科学发展对数学提出的要求。代数符号的引入和发展经历了漫长的历史过程,大体可分为三个阶段。

第一阶段称为文词代数。这时的代数内容,完全是用文字词句来叙述的,一个问题及其解答写出来就像一篇论说文。早期的多数代数著作,包括花拉子密的《代数学》,都是这种文词代数。在欧洲直到 15 世纪,大多数代数著作也仍然属于文词代数。

第二阶段称为简字代数或半符号式代数。这种代数的特点就是把代数中的某些量或词用简缩的字母或记号表示,常采用词语的第一个或前两个字母表示。简字代数是古希腊数学家丢番图的一大创造,他引用了未知数、未知数的各次幂(直到 6 次)、减、相等和倒数的缩写记号。把数字与这些记号用适当的方式排列,就能表示多项式和方程。中世纪的印度数学家也使用缩写文字和记号来表示未知数和主要运算并记述

方程。他们所用的记号比丢番图更多,比如有多个未知数时,他们就分别用不同颜色单词(黑、蓝、黄等)的前两个字母表示。我国两汉时代的《九章算术》中就已经使用适当排列的算筹来表示一次方程组,这相当于现代的矩阵表示法,每个方程就是矩阵的一列。宋元时代产生的天元术和四元术则已是一种相当成熟的半符号式代数了。

第三阶段就是符号代数。其主要特点就是系统地引入字母和符号表示数和许多基本数学概念以及它们的运算和关系。文艺复兴时期,现代数学的许多符号由欧洲各国的数学家零星陆续引入并改进。大约至 17 世纪中叶,系统的符号代数基本上形成。在这方面,意大利著名数学家韦达作出了突出的贡献。

现代数学符号的引入大约始于 15 世纪末,有些符号经多次改进才成为现今通用的形状。下面列出部分常用数学符号产生的大致年表:

(1) 加号“ $+$ ”和减号“ $-$ ”是德国人维德曼(J. Widman)于 1489 年首先使用的,当时他用来分别表示过剩和不足。1514 年荷兰人赫克(Hoecke)正式把它们作为代数运算符号使用。

(2) 乘号“ \times ”和比号“ $:$ ”由英国人奥特雷德(W. Oughtred)于 1631 年在他的著作《数学之钥》中引入。1689 年莱布尼兹在一封信中提议用“ \cdot ”代替“ \times ”作乘号,以免后者与字母“ x ”混淆。

(3) 除号“ \div ”于 1659 年首先出现在瑞士人雷恩的一本代数著作中。

(4) 等号“ $=$ ”的发明人是英国的雷科德(R. Recorde)。他在出版于 1557 年的数学著作《砺智石》中首次使用等号。书中

写道：“为了避免反复使用‘*is equal to*’这个短语，我采用了一对等长的平行线段来表示，因为没有任何其他两样东西比一对等长的平行线段更显得相等了”。

(5) 根号最初是波兰数学家鲁道夫(Rudoff)在其 1525 年编写的一本代数书中引入的。当时用“ $\sqrt{\quad}$ ”表示平方根，因为它很像小写字母 r (来自拉丁文 *radix*—根)。后来笛卡尔把它改成“ $\sqrt{\quad}$ ”。

(6) 大于“ $>$ ”和小于“ $<$ ”最早于 1631 年出现在英国数学家哈里奥特的遗作《实用分析术》中。

在建立符号体系方面使代数产生最大变革的是法国的韦达(F. Vieta, 1540~1603)，他是 16 世纪最伟大的数学家。韦达受过专业的律师教育，曾当过地方议会的议员和亨利亲王的枢密顾问。他把大部分的业余时间贡献给数学事业，常常一连数日闭门在家研究数学。传说在法国与西班牙战争期间，西班牙人利用密码在法国境内自由地秘密传送军事情报。应法兰西国王亨利四世之请，韦达凭借其聪明才智应用数学知识破译了对方的密码，促使法国在两年内就打败了西班牙。以致于西班牙国王菲力普二世称法国在对付他们时“采用了魔术”。

韦达是第一个有意识地、有系统地在代数中使用字母的数学家。他认真研究了前人的代数著作，发现其中所讨论的方程都是各种特殊类型的具体数字系数的方程。例如卡丹的《大术》中方程的种类多达 66 种，每一种方程都要给出一个特别的解法。韦达想到，特殊类型的方程种数不计其数，对每一种都加以研究既烦琐又无必要。他努力寻求一种表达各种代数方程及其解法的高效率的通用方法。这种方法就是系统地用字母表示数：把方程写成字母系数的一般形式。

韦达的《分析术引论》(1591)是数学史上的第一部符号代数著作。在该书中,韦达不仅用字母表示未知数及其幂,而且用字母表示方程中各项的系数。他用元音字母表示未知数。用辅音字母表示已知数。不过韦达当时使用的数学符号还较少,有些表达方式与现代写法不尽相同。而且在记述代数式或方程时常采用字母、符号与文字语言混用的形式。比如,他把

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$$

(即现代的方程 $5bx^2 - 2cx + x^3 = d$)

写成

B5in A quad - C plano 2 in A + A cub aequatur D solido.

其中的拉丁文记号 *plano* 和 *solido* 分别表示平面量和立体量, *quad* 和 *cub* 分别表示平方和立方, *in* 表示乘, *aequatur* 表示等于。

韦达在代数中系统地使用字母和符号后,就把这种符号式的代数称为“类的计算术”,以区别于“数的计算术”,并以此作为算术与代数的分界线。从此代数的面貌焕然一新,成了研究一般类型的形式和方程的学问。

在古代希腊,人们偏爱用几何图形和方法来处理数的问题或关系,韦达认为可以用更加明显和直接的代数恒等式表示这些几何图形和方法中所隐含的数量关系。在他的著作《分析五篇》中,他把一个一般的二次式通过恒等变形的方法进行配方,并给出了一些代数恒等式,如完全立方公式,相当于现代的公式

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3。$$

韦达在方程论方面也取得了重要成就。他用变量代换的方法来简化方程,改进了三次和四次方程的解法。令我们更加感兴趣并使他名垂千古的是他研究了方程的根与系数关系。

对于二次方程,这个关系用我们熟悉的现代形式表示就是:

设 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根,则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ 。

韦达在他的《论方程的整理与修正》(1615)一书中,对于二次和三次方程的 4 种特殊形式给出了类似上述关系的结论。至于一般情形的一元 n 次方程的根与系数的关系,即现在所称的“韦达定理”,则是由荷兰数学家吉拉德(Girard)于 1629 年提出的。而韦达定理的证明,则是在笛卡尔 1637 年提出因式定理、高斯于 1797 年证明了代数基本定理以后作出的。

此外,韦达在三角学上也有所贡献。他发现了平面三角中的正切定理,导出了把 $\sin n\theta$ 和 $\cos n\theta$ 展开成用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的乘幂表示的公式。韦达还研究过圆周率问题,得出了以下两个重要结果:

$$\pi \approx 3.1415926536,$$

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{90^\circ}{2} \cos \frac{90^\circ}{4} \cos \frac{90^\circ}{8} \dots$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

后一个结果首次把无穷乘积引入 π 的表达式,这是 π 计算史上的一大创新。

韦达是文艺复兴时期的进步学者,主张人文主义,反对经院哲学。他自称是古代数学的挖掘者、继承者和发扬者。他在建立代数的符号体系方面所作出的卓越贡献彻底改变了代数学的面貌,因而被誉为“代数学之父”。在韦达之后,数学符号仍被陆续引入,符号体系不断得到改进和完善,17~18 世纪的笛卡

尔、莱布尼兹和欧拉等人,在这方面作出过重要的贡献。

第九节 明代数学的衰退、算盘与珠算

宋元时代是我国传统数学发展的鼎盛时期。在这一时期中,以秦九韶、杨辉、李冶、朱世杰为代表的数学名家辈出,蜚声数坛;中国剩余定理(大衍求一术)、贾宪三角形、天元术和四元术等世界领先的数学成就纷纷涌现,彪炳数史。然而到了明代,这种数学迅速发展的势头未能持续,数学的优良传统没有能继续发扬光大。从元末(14世纪初)到明末(17世纪初)的300年间,我国传统数学的研究偃旗息鼓,没有产生一项世界一流的成果,连宋元时代创造出的许多优秀数学成就也鲜为人知,有的几乎失传。可见,明代是我国传统数学的衰退时期,正如中算史家李俨所描述的:“(明算科)考试制度久已废止,民间算学大师又继起无人,是谓中算沉寂时期”。

明代数学衰退的原因,历来受到中外数学史家的关注。然而历史事件是复杂的,诸家说法,各有所偏重。归纳起来,大致有四方面的原因:1. 我国数学本身的弱点;2. 数学家的思想或世界观的影响;3. 社会政治制度的牵制(包括科举取士制度)。4. 资本主义生产方式发展不充分。这是数学史上的一个重大课题,有待于进一步的深入探讨。

随着手工业、商业、贸易和科学的发展,产生了大量日益繁重复杂的计算任务,对数学的发展提出了新的要求。从元末到明末数学的特点是:传统的理论数学遭到冷落,处于停滞甚至衰退状态,而与商业等有关的应用算术和珠算得到发展和普及。据现有史料考证,这个时期在民间流传的商业和应用性的算书不下几十种。这些算书语言通俗,内容浅近,注重实

用,流传甚广,促进了数学教育的普及。不少算书还编有各种算法歌诀,易于记忆,便于掌握,既可提高计算的速度,又增加了数学的趣味性。明代商业算术的杰出代表作之一是吴敬的《九章算法比类大全》(1450)。

该书共 10 卷,在第一卷前面有一个“卷首”,列举了整数、小数的记法、度量衡单位及其进率,还有整数、分数的四则运算等等。第一卷至第九卷是正文,汇编了 1000 多个应用问题及其解法。这些问题按《九章算术》的体例分成 9 类,编成 9 卷。每卷的前几个问题主要摘自古算书,他称之为“古问”,用以揭示一般的解题方法,然后再结合当时的实际应用选编类似的问题,称之为“比类”。在这些“比类”问题里,包括利息计算、商品交换、就物抽分(以货物作价抵偿费或加工费等)、合伙经营等大量商业算题。第十卷专门讲述开方。

《九章算法比类大全》里介绍了一种过去从未见过的“写算”乘法:根据两个乘数的位数画好方格,每个方格按从左下到右上方向画一条对角线,将两个乘数分别置于方格上方和右方,数字零用空位代替。计算时,先把每两个数字的乘积按十位与个位分别填写在相应方格中对角线的上下方。再从右向左按对角线方向斜行相加,依次得到积的各位数(从低位到高位)。例如,图 2-10 就是 $30745 \times 8196 = 251986020$ 的写算乘法图。后来在程大位的《算法统宗》里也有类似的算法,不过称为“铺地锦”。这种算法当时在印度、阿拉伯、欧洲等地区非常流行。

算盘是一种简单实用的计算工具。从古代到中世纪,世界各国发明了各式各样的算盘,大致可分为沙盘、算板、嵌珠算盘和穿珠算盘四大类。随着时代的发展,多数算盘已从社会上销声匿迹,成了博物馆中的文物。而以我国算盘为代表的穿珠

	三		七	四	五	
二	二	四	五	六	三	二
五		三		七		四
一	二	七	六	三	三	六
九	一	八	四	二	二	四
	八	六		二		

图 2-10

算盘却至今仍然盛行不衰。

中国的算盘起源于何时,至今未有定论。最早的估计是汉代(公元2世纪),最晚的估计是元朝末年。在元末陶宗仪所著《南村辍耕录》(1366)中提到一句俗语:“…算盘珠,言拨之则动。”用算盘珠比喻做事被动的人。可见那时算盘已普遍使用了。

我国的算盘是由算筹演变而来的。随着筹算方法的简化和算法歌诀的盛行,计算的速度大大加快了。但是摆弄算筹显得笨拙缓慢,很不方便,不能适应快速计算的需要。人们很自然地寻求一种方便实用、得心应手的计算工具。经过人们长期的实践和创造,由算筹小型化和摆弄位置的固定化而逐渐演变产生算盘。后经不断改进和完善,到明代时,算盘已具有现代的形式了。

穿珠算盘还有日本算盘和俄罗斯算盘。日本算盘是从中国传过去的,但稍有不同。日本算盘窄而长,档数较多,算珠由扁圆形改成菱形(纵截面),每档梁上方两珠改成一珠(有时也

有两珠)。这种算盘小巧灵便,近年来在我国也逐渐流行起来。俄罗斯算盘每档有 10 个算珠,每个算珠表示 1 个单位,单纯采用十进制,不像中国算盘五升制和十进制并用。俄罗斯算盘在使用时拨珠速度较慢,容易出错,不太实用。但它直观易学,不用专门口诀,现常作为幼儿学算的教具。

使用算盘计算有一套专门的拨珠方法和对应的口诀,这就形成了珠算(术)。在明代,珠算已相当普及,并且出版了不少有关珠算的书籍,其中流传至今,影响最大的是程大位(1533~1606)的《直指算法统宗》(1592)。

《算法统宗》是一部以珠算应用为主的算书。全书共 17 卷,有 595 个应用题,多数问题摘自其他算书,但所有计算都改用珠算。书中载有算盘图式和珠算口诀,并举例说明如何按口诀在算盘上演算。其中开平方和开立方的珠算法是程大位首先提出来的。书末附录“算经源流”记载了宋元以来的 51 种数学书名,其中大部分已失传,这个附录便成了宝贵的数学史料。

《算法统宗》流传极广,明清两代不断翻刻、改编,“风行宇内”,凡搞计算的人,“莫不家藏一编”,影响之大,在数学史上是少见的。这本书传入邻国后也产生了很大影响。日本数学史家三上义夫认为,日本传统数学——和算的奠基名著“《尘劫记》是基于《算法统宗》而来的著作”。

当今,计算技术飞速发展,电子计算机和袖珍计算器日益普及,但是珠算仍然显示出其独特的魅力。算盘结构简单,美观耐用,设计合理,操作方便。珠算易学易会,快速准确。大量实验和比赛表明,对于整数或小数的加、减和乘法,用珠算远比用计算器快捷方便得多。因此,目前我国商业、财会、金融等许多行业中,珠算仍在广泛地被使用,在经济建设中发挥着

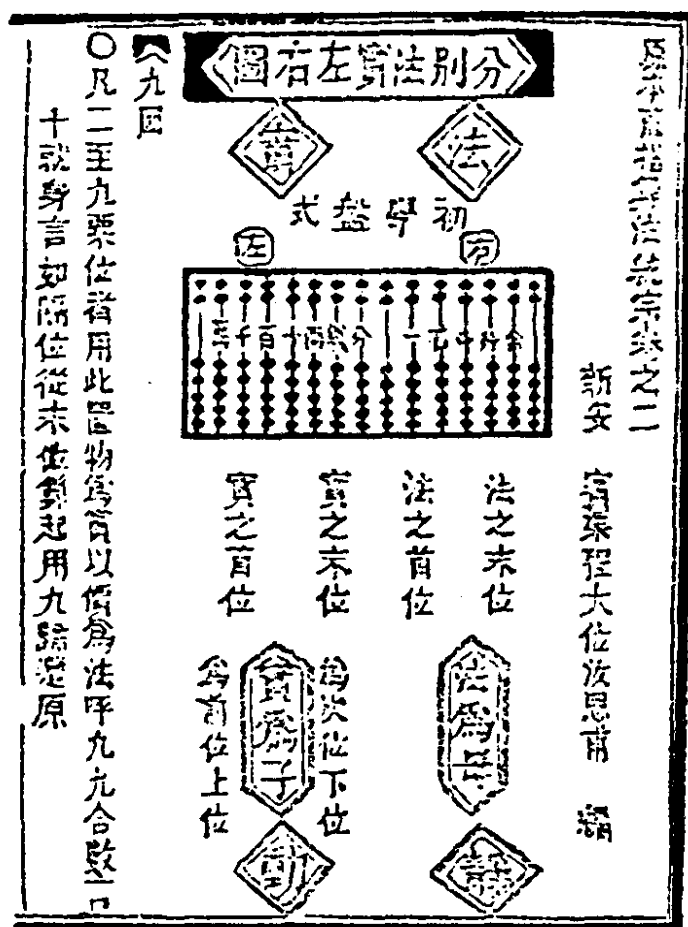


图 2-11

重要作用。

珠算不仅具有优越的计算功能,而且蕴藏着巨大的教育价值。从 50 年代起,在全国各地小学广泛开展的“三算结合教学”试验就是探索珠算教育功能的有益尝试。三算结合教学,是从小学一年级起,利用算盘帮助学生认数和计算,以口算为基础,笔算为主体,珠算为工具,把口算、笔算、珠算有机地结合起来同步进行教学,各展其长,交替运用,相得益彰。大量的实验结果表明,三算结合教学在我国传统算术教学基础上,充

分发挥珠算的教育功能,促进儿童手、脑并用,使抽象演算形象化,有利于发展学生思维能力,提高运算能力,减轻学生负担,从而大面积提高小学数学教学质量。

三算结合的教学成果得到了国外专家的好评。日本珠算教育联盟会长荒木勋 1979 年 5 月率团来华进行学术交流期间,听了三算课后喜形于色道:“这真是把三算融合在一起了,我们要与中国联合起来,把这样好的教学方法向全世界介绍”。美国南加利福尼亚大学珠算教育中心主任理查德博士 1985 年访华时说:“中国的三算结合是一种非常好的教学方法,这是一个创造。……三算结合增强人的思维能力。美国和西欧的一些人对中国的三算结合很感兴趣,我们非常希望把中国的三算结合作为中美两国的学术交流和合作项目”。

1979 年 10 月 31 日,中国珠算协会诞生,到 1983 年 10 月止,全国 29 个省市自治区(不包括台湾)陆续成立了珠算协会。近年来,在这些协会的组织 and 指导下,全国性和地方性的珠算技术比赛频繁开展,珠算技术等级的鉴定工作趋于正常化制度化,珠算技术的普及、研究和学术交流活动也相当活跃。珠算,这门古老的计算技术和学问,正日益焕发出其青春的光华。

第十节 徐光启翻译《几何原本》

15、16 世纪,欧洲经历了文艺复兴,正处于资本主义的前夕,生产和科学都得到了迅速发展。一些西欧国家为了寻找贸易市场和原料基地,不断向海外扩张势力范围。在这种扩张的初始阶段,这些国家向海外大量派遣传教士。传教士来华始于 16 世纪末,他们除了传教之外,也带来了西方的科学技术,在

客观上对促进我国科学技术的发展起了重要作用。早期来华、影响最大的传教士是利玛窦。

利玛窦(Matteo Ricci, 1552~1610), 生于意大利东部的马切腊塔, 曾师从德国数学家克拉维斯(Clavius)学习数学, 后来他给大科学家伽利略讲过几何学, 使伽利略对数学发生浓厚兴趣, 并且终生不渝。利玛窦于 1582 年来华, 带来了一些西方科技书籍和贡品, 如世界地图、自鸣钟、乐器、天文仪器及数学书籍等。他曾在广东、南昌、南京、北京等地传教, 同时苦心学习中国语言文字, 攻读经书, 研习儒学, 主张将中国的孔孟之道和宗法敬祖思想与西方的天主教相融合。当他深深地被中国悠久文化所吸引的同时, 敏锐地发觉其中缺少一种精细的数学气质。他给罗马教廷的一份报告中曾这样写道:“现在只好用数学来争取中国人的心”。利玛窦初时的活动并未引起人们的多大注意, 1596 年 9 月 22 日, 他在南昌成功预测了一次日食, 使他名声大振。1600 年, 利玛窦在南京与徐光启相识, 开始了他们之间的科学合作。1610 年, 利玛窦卒于北京, 后葬于三塔寺内(现址在北京市车公庄附近的北京市委党校校园内)。

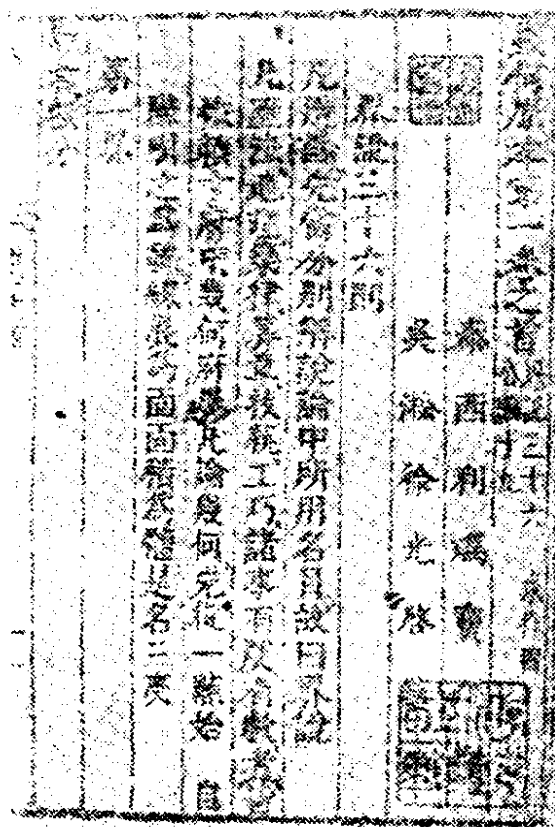
徐光启(1562~1633), 上海吴淞人, 幼年时家道中落。19 岁时中秀才。1596 年徐光启在赵家坐馆, 陪赵家公子赴京应北闱乡试, 结果自己倒中了顺天府第一名举人。1604 年, 徐光启中进士入翰林院, 晚年位至文渊阁大学士。他“生平务有用之学, 尽绝诸嗜好, 博访坐论, 无间寝食”。徐光启毕生致力于介绍西方科学成就, 注意结合中国的科学传统, 成为我国近代科学的启蒙大师。在谈到西方科学时, 徐光启感到应“窥其象数之学, 以救汉宋以来空言论学之失”。在数学方面, 徐光启亦有深刻见解, 他曾认为“盖凡物有形有质, 莫不资于度数故

耳”。

1604年,徐光启刚中进士,李之藻(1565~1630)自福建来京,徐、李两人向利玛窦学习科学知识,并协商翻译若干西方科学典籍。利玛窦主张先译天文历法书籍,以便打入宫廷。徐、李则认为按照科学的逻辑顺序,应先译数学书籍。这一超人的远见,导致《几何原本》中译本的问世。1606年秋天,由利玛窦口译,徐光启执笔,合作译完欧几里得《几何原本》前6卷,1607年在北京雕版刊行(图2-12)。徐光启对《几何原本》的刊行十分重视,他亲自写了《刻几何原本序》,手迹至今犹存(图2-13)。

徐光启和利玛窦合译的《几何原本》语言通俗,文字贴切,错误很少。其中的许多数学译名都是从无到有,边译边创造的。在翻译过程中,徐光启精心研究,反复推敲,煞费苦心,使许多数学译名都十分恰当。“几何”一词的选用,其他如点、直线、平行线、角、三角形、四边形、有理数,无理数等都是这个译本首先定下来的,这些名词在我国一直沿用至今,而且还影响到日本、朝鲜等邻国。只有少数名词后来有所改动。

徐光启通过对《几何原本》的翻译,深刻地领悟到了这部巨著的精妙之处。他对《几何原本》的逻辑结构推崇备至,在“几何原本杂议”中说:“此书有四不必:不必疑、不必揣、不必试、不必改。有四不可得:欲脱之不可得,欲驳之不可得,欲减之不可得,欲前后更置之不可得。有三至三能:似至晦,实至明,故能以其明明他物之至晦;似至繁,实至简,故能以其简简他物之至繁;似至难,实至易,故能以其易易他物之至难。易生于简,简生于明,综其妙在明而已”。这番评论中虽难免言过其实的溢美之词,但却反映了当时徐光启对有别于中国传统数学的这种逻辑体系的认识。与此同时,徐光启精明地洞察出这



利玛窦、徐光启译本(1607) 第一页

图 2-12

本书的重大教育意义。他认为：“此书为益，能令学理者祛其浮气，练其精心；学事者资其定法，发其巧思，故举世无一人不当学”。一语道破了《几何原本》在科学思维方面给人以系统训练的巨大作用。今天看来，欧氏几何的这种教育功能仍不可低估。

徐光启和利玛窦译出的《几何原本》前 6 卷，乃是东方的最早译本（不计阿拉伯文本）。较之俄译本（1739）、瑞典文本（1744）、丹麦文本（1745）、波兰文本（1817）都早。当时徐光启欲译完全部 15 卷，被利玛窦所止，说：“果以为用也，而后徐计



利、徐译本徐光启序手迹

图 2-13

其余”。徐光启在《几何原本》跋中写道：“续成大业，未知何日？未知何人书以俟焉”。急切之情，溢于言表。

徐、利的译本刊行后，虽然流传范围并不广，但是讨论研究《几何原本》的数学工作者却逐渐增多起来，并出版了不少几何专著。这些著作逐步改变了我国传统算经那种应用问题集的形式，对于解题方法和结论，力求说理证明。这些对后来的中国数学界有一定的影响。

然而，当时能理解《几何原本》精神实质者甚少。清初的李子金曾这样描述京城里那些号称博学多才的人对《几何原本》的态度：“无不望之而反走，否则掩卷而不谈；或谈之也茫然不

得其解”。狭隘的民族意识和复古主义思潮也淹没了徐光启当年的热情。不少名流学者都认为“几何即勾股”，“代数即天元”，一切西方科学技术，中国古已有之，因此不必学习别人的长处，只需从前人的故纸堆中去找就行了。对于《几何原本》的正确认识，到清代数学家李善兰才得以继续。1857年，李善兰与英国传教士伟烈亚力合作续译的《几何原本》后9卷正式刊行。

徐光启还仿照《几何原本》的方法撰写了《勾股义》，试图给我国古代的勾股算术以严格的论述。此外，他根据利玛窦的一部草稿，编成《测量全义》，这是西方几何学、三角学、测量学首次在我国传播。徐光启对数学作为一个整体，有他的独到的见解。他认为，数学在历法、水利、测量、建筑、财政、机械、地图等方面都有应用。这似已初步形成了纯粹数学与应用数学的想法。

徐光启在与数学有密切联系的天文历法方面也有很深的造诣。明崇祯二年(1629)五月初一发生日食，四月二十九日公布根据大统历、回回历和徐光启的新历法的三种预测，“至期验之，光启推算为合”，朝廷即命徐光启督修历法。1633年，徐光启卒于北京，但新历法继续试行。后来由于政治和社会的原因，新历法的推行有所反复，但徐光启制定新历法的业绩却是不可磨灭的。

1982年适逢徐光启诞生320周年，上海市人民政府重修位于徐家汇天主教堂旁的徐光启墓，并将墓址南丹公园更名为光启公园。墓侧有徐光启《刻几何原本序》手迹的碑廊，由数学家苏步青手书“明徐光启墓”的墓碑，徐光启塑像立于墓前，供人凭吊。作为中国近代科学的启蒙大师，徐光启的历史功绩是永远值得纪念的。

第十一节 中世纪数学思想综述

数学最初起源于古代的埃及、巴比伦和中国。到公元前,初等数学得到迅速发展并初步形成了一定的理论体系。欧几里得的《几何原本》和中国的《九章算术》分别代表了以逻辑推理为主体和以数量计算为中心的两种风格迥异的体系。进入中世纪,由于政治、军事和经济等原因,希腊数学走向衰落,欧洲数学处于低潮,科学的中心转移到了东方,数学也进入了“东方的发展阶段”。中国数学稳步发展,印度、阿拉伯数学也很兴旺发达。这一时期内,各地区,各民族之间的科学文化交流和影响也显著增加。希腊数学、印度数学和阿拉伯数学相互融合和影响,中国数学传入日本。特别是阿拉伯数学传入欧洲,成为文艺复兴前后欧洲数学复苏和崛起的重要因素之一。

一、中国数学

在南北朝时代,由于刘徽、祖冲之等人的杰出成就,中国数学出现了繁荣时期。隋代只有短短 37 年的历史,数学成就很少。值得一提的只有刘焯(544~610),他是当时卓越的科学家,对数学和天文颇有研究。公元 600 年,刘焯完成了优秀的历法《皇极历》。在编制这部历法的过程中,需要涉及到太阳、月亮的视运行速度和节气、日期等之间关系的计算问题,刘焯改进了《周髀算经》中所用的一次内插法,创立了“等间距的二次内插公式”,并在历法中四处使用了这个公式。隋朝第一次出现了全国性的正规的数学教育体制。

唐代是我国历史上著名的太平盛世,王孝通和一行和尚在数学上有所贡献。唐代的数学教育制度得到进一步改进和

完善,李淳风等人校订的《算经十书》对数学教育有重大影响。

宋元时代是中国传统数学的鼎盛时期,贾宪的“增乘开方术”和“开方作法本源图”,杨辉的数学普及工作和教育思想,秦九韶的“大衍求一术”和高次方程数值解法,李冶的天元术和朱世杰的四元术都是这一时期数学成就的杰出代表。

到了明代,传统理论数学开始衰退,商业算术普及,珠算流行,西方数学开始传入,徐光启和利玛窦合译的《几何原本》开创了学习西方科学技术的先河。

二、印度数学

印度是世界文明古国之一。印度数学在5~12世纪处于全盛时期,出了不少有名的天文学家兼数学家,如阿耶波多(Aryabhata,约476~550)、婆罗摩笈多(Brahmagupta,约598~660)、摩诃毗罗(Mahavira,850年左右)、婆什伽罗(Bha-skara,1114~1185)。

印度数学在算术和代数方面取得了较重要的成就,对世界数学的发展产生了一定的影响。

印度人采用了优越的十进记数法,并且创造了简明、方便的印度数码,这是人类文化史上最重要的发明之一。零也是印度人的发明,起初仅作为记数时空位的记号,后来才把零看作独立存在的数。

负数在我国《九章算术》中已经出现,并且有负数的加减法则“正负术”。印度人对负数的认识也很早,公元七世纪,婆罗摩笈多把负数解释为“负债”或“损失”,并且系统地给出了负数四则运算的正确法则。

印度人掌握了开平方和开立方的方法,当开平方开不尽时,他们用近似值表示,如巴克沙的手稿里有相当于 $\sqrt{A} =$

$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}$ 的近似公式。

印度人知道了无理数的一些运算法则,例如,他们会算

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{\left[\sqrt{\frac{12}{3}} + 1\right]^2 \times 3} = 3\sqrt{3}。$$

印度人在代数中使用一些缩写的文字和记号来表示未知数和主要运算并记述方程。印度数学家已经会解一般的一元二次方程和特殊的高次方程。婆罗摩笈多用语言叙述了一元二次方程的一般解法,相当于把一元二次方程先化为 $ax^2 + bx = c$ 的形式,求得它的一个根是 $x = \frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$ 。

此外,印度人还研究了一次和二次不定方程的整数解问题。

三、阿拉伯数学

阿拉伯数学在世界数学发展史上占有特殊的地位。一方面,阿拉伯人通过东西方文化交流,把当时的数学知识传播到了欧洲,对欧洲数学的发展起了很大促进作用。

阿拉伯数学的主要贡献在于,花拉子密创立了“代数学”,并且把它作为系统地研究解方程问题的一门独立学科。阿拉伯人改进了印度数码,促进了这种数码后来传遍欧洲及世界各国。

四、欧洲数学

中世纪前期,欧洲数学处于停滞状态。从12世纪起,由于贸易和旅游的开展和战争的原因,促进了东西方的科学文化交流,希腊数学和阿拉伯数学传入了欧洲,斐波那契在这方面做出了突出贡献。

文艺复兴是欧洲科学史上的一场革命,在 200 多年间,一直存在着科学与神学的激烈斗争,人们的数学观产生了根本的变化。

代表着新兴资产阶级的人文主义者吸收了古希腊数学中的精华,提出“还我毕达哥拉斯”、“让柏拉图回来”等口号,批判经院哲学权威,创立新思想。他们认识到:自然界是合理的、有秩序的、按照万古不变的规律在运转的,这些规律是按数学方式设计的。因而科学工作的最终目标是确立定量的数学上的规律。

这一时期科学上的一些重大成就给了宗教神学以沉重的打击。1543 年,哥白尼(Copernicus)发表《天体运行论》,提出日心说,向教会信奉的地心说宣战。恩格斯高度评价这一成就:“从此自然科学便开始从神学中解放出来,……,科学的发展从此便大踏步地前进。”宗教神学的权威遭到动摇,各种旧的哲学体系纷纷瓦解,传统的观念和道德准则受到怀疑。人们逐渐认识到,数学是唯一的真理体系,是各种科学的新的、坚固的理论基础。

文艺复兴时期,科学研究的方法产生了重大的变革,创立了“实验—数学”的方法。宗教神学奉行的是经院哲学的研究方法,即从一些权威的、先验的原理或假设出发,推演出一些所谓的规律或真理。最早公开反对经院哲学的著名人物之一是天才的多才多艺的艺术家达·芬奇(L. da Vinci, 1452~1519)。他宣称是“实验的信徒”。他主张搞科学研究应直接向自然界请教,自然界的力和运动必须通过数量的研究来探讨。他说:“人们的探讨不能称为是科学的,除非通过数学上的说明和论证。”

在倡导科学方法改革中更有影响的是著名的英国哲学家

培根(F. Bacon, 1561~1626)。他极力提倡实验方法,指出实验是认识的基础,感觉是一切知识的源泉。培根是科学归纳法的奠基人,他认为探求和发现真理不能光用演绎的方法,还要用归纳的方法。他坚决主张用“逐步的和继续不断的归纳以代替草率的一般结论”。培根的广为流传的著名论断“知识就是力量”成了激励人们学习文化知识和探寻科学真理的常用格言。

早期运用“实验—数学”方法最成功的著名例子之一是伽利略的自由落体定律。

伽利略(Galileo Galilei, 1564~1642)是著名的意大利物理学家和天文学家。他在比萨大学当教授时做过一次有名的实验。他当着一群学生、学者和牧师的面,从比萨斜塔上落下两块金属。一块重量为另一块重量的10倍。当时人们都深信亚里士多德的学说“重物体比轻物体降落得快”。但实验结果是两块金属同时落地。根据这一事实,伽利略归纳出自由落体定律:物体下落的距离与下落时间的平方成正比。用数学公式表示就是熟知的 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 。这一成就为牛顿后来建立动力学理论奠定了基础。

文艺复兴时期的数学成就在本章第7节已有叙述,这里不再重复。

第三章 近代数学

从 17 世纪开始,变量数学逐渐登上历史舞台。微积分的创立,是人类文化史上的杰作,标志着科学发展的新阶段。在此基础上,微分方程,微分几何,调和分析,画法几何,概率论等学科不断形成。数学发展进入了崭新的黄金时代。

第一节 纳皮尔发明对数、笛卡儿 和费尔玛创立解析几何

时光进入 16 世纪,中世纪的黑暗即将过去。文艺复兴的人文主义思潮,正孕育着数学的新时代。由于产业革命的刺激,航海业,制造业迅速发展。天文学,物理学向数学提出了新的课题。在微积分诞生之前,最重要的数学事件是纳皮尔发明对数,以及笛卡儿创立解析几何。

纳皮尔(Napier John, 1550~1617)出生于苏格兰的默奇斯通。他是一位男爵,早年从事神学工作,但他对数学也有着浓厚的兴趣。他以欧几里得的方式证明了罗马教皇是反基督者、世界的末日就在 1786 年。他自认为《圣约翰启示录中的一个平凡发现》一书是他最重要的贡献,继这项神学工作之后,他于 1594 年开始进行改革数值计算实用方法的工作。他躲在南苏格兰爱丁堡附近的默奇斯通城堡中从事这一工作达 20 年之久。对数的发现,才是他对人类真正不朽的贡献。现在

“纳皮尔对数”已为每个中学生所知。

纳皮尔的对数表最初是在他的著作《论述对数的奇迹》(Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, 1614)一书中出现的,他在此书中仅对于如何在计算中使用这些数表作了介绍,至于计算这些数表本身所用的方法,以及它们所依据的推理的简单说明,则总结在他的另一著述《作出对数的奇迹》(Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio, 1619)一书中,可惜这一著作直到他死后方才出版。

使用对数可以把复杂的乘法和除法转化为比较简单的加法和减法,这些优点十分明显。开普勒发现行星运动的第三定律,曾得益于纳皮尔的对数表,运用对数使庞大的计算大为简化。

值得令人注意的是,在那个时代分数幂和指数表示法都还没有引入,而且也没有普遍采用小数点命数制,由于纳皮尔系统地使用小数点,这才大大地促进了17世纪的人们普遍采用小数点表示法。

现在,我们认为(以 a 为底的)数 x 的对数 $\log_a x$ 是这样个数 y ,它使得 a 的 y 次幂 a^y 等于 x 。我们也把对数看成是一个函数,并且看成是指数函数的反函数,然而,当时对一般的函数概念尚未建立,纳皮尔的计算是根据具体对应关系进行操作的。

几何学教授布里格斯(Briggs, 1561~1631)曾专程访问纳皮尔,建议取10作为底数,约定1的对数为零。布里格斯对以后的对数传播作了贡献。他于1624年发表的著作中给出了三万个数的常用对数表,精确到小数14位。

解析几何的创立,主要归功于法国的笛卡儿和费儿玛。

若内·笛卡儿(Rene Descartes, 1596~1650),通常把他

看成是近代哲学的开创者。他的哲学著作焕发着一股从柏拉图到当时的任何哲学名家的作品中全找不到的清新气息。笛卡儿虽然是近代数学的开创者之一,但是确切地说,他在数学和自然科学上的成就,只是他哲学成果在科学上的表现。

1596年3月21日,笛卡儿出生于法国图朗的拉艾,二岁丧母,深受父亲溺爱。父亲是布列塔尼地方议会的议员,握有一份还相当可观的地产。笛卡儿8岁那年(1604)被送到法国当时最好的学校“拉夫赖士的耶稣会学校”接受教育。八年中这个学校给他打下的数学根底,比当时在大多数大学里能够获得的根底似乎还强得多。1612—1616年笛卡儿遵父命去普瓦捷大学学习法律。因为感到巴黎的社会生活气氛十分繁嚣,于是退避到郊区圣日耳曼的一个隐僻处所,在那里研究几何学。然而朋友们还是刺探出了他的踪迹。他为了确保更充分的安静,便到荷兰投了军(1617)。由于那时候荷兰正太平无事,他似乎享受了两年不受干扰的沉思。然而,30年战争(1618~1648年欧洲以德意志为主要战场的战争)一起,他又加入了巴伐利亚军(1619)。就在1619年到1620年之间的冬天,他呆在巴伐利亚一间现在很有名的“火炉子”一般的房间里,整天潜思。据他自己述说,当他出来的时候,已经悟出了自己赋有的特殊使命,他的哲学也已经半成,笛卡儿是一个懦弱胆小、奉行教会仪式的天主教徒。1632年他完成了重要论文《宇宙论》(Le Monde),但不敢发表,因为里面有两个异端学说:地球自转和宇宙无限。1637年他发表了《屈光、流星和几何学》,而他最有名的《方法谈》(Discours de La Method)就是这部选集的哲学导言。

1641年笛卡儿发表了他的哲学杰作《第一哲学沉思集》,三年后出版巨著《哲学原理》,全面地阐述了他的形而上学和

科学理论。

笛卡儿在荷兰一住就是 20 年。由于法国驻斯德哥尔摩大使沙尼雨的介绍,他和瑞典克丽斯蒂娜女王有了书信往还,克丽斯蒂娜美丽、热情而博学。然而和大部分君主一样,以为自己既然是君主就有权浪费伟人的时间。女王请求笛卡儿亲临她的宫廷;派了一艘军舰去迎接(1649 年 9 月)。女王想每天听笛卡儿讲课,但是除在早晨 5 点钟以外又腾不出其他时间。斯堪的纳维亚冬日的晨寒对不习惯起早、体质孱弱的笛卡儿实在是一种灾难。那时,沙尼雨又害了重病,笛卡尔又得去照料。大使健康复原,笛卡儿却病倒了,从此一病不起。1650 年 2 月,这位哲学巨人终于长辞人世。

笛卡儿对几何学的伟大贡献是发明坐标几何,固然还不完全是最后形式的坐标几何。他在《几何学》(中译本,袁向东译,商务印书馆,1992)中说:“在分析问题中,若认为该问题可解时,首先把要求出的线段与所求的未知量,用名称表出。然后,弄清已知和未知线段的关系,按照正确的逻辑顺序,用两种方法来表示同一量,并建立相等的关系,把最后得到的式子叫做方程式。”显然,笛卡儿几何是以“解析”作为基本的方法的,即把对图形的研究转化为对方程式的研究,这充分显示了笛卡儿的卓越睿智,确是几何学研究中的一次大革命。

在上述思想指导下,他做了如下工作:

(1) 引入“坐标”观念 根据笛卡儿的思想,当满足方程式的变数 (x, y) 变化的时候,坐标 (x, y) 的点画出的是曲线,从而,希腊人认为“线是点的集合”,笛卡儿却认为“线是点运动的结果”。由此,笛卡儿关于“线”的定义与希腊人的显著区别在于“动”与“静”。这种思维方法给牛顿等大数学家以莫大影响。

(2) 利用“坐标法”提出曲线表示成方程的思想 考虑二元方程 $F(x, y) = 0$ 的性质, 满足这方程 x, y 的值无穷多, x 变化时 y 也跟着变, x, y 不同数值所确定的平面上许多不同的点, 便构成了一条曲线。这样一个方程就可以通过几何上的直观来采用合适的方法去处理。以后笛卡儿又进一步提出了用方程表示曲线的思想, 即用代数的方法研究曲线的性质。

笛卡儿创立了坐标几何, 但并没有引入现今通用 xOy 直角坐标系。他只是在一条长为 x 的线段 AB 的端点 B 处, 垂直地画一条长为 y 的线段 CB , 表示 x 与 y 的对应。

在 17 世纪的数学史上, 另一位杰出的数学家是费尔玛 (Pierre Fermat, 1601~1665)。

费尔玛, 1601 年 8 月 20 日出生于法国的图卢兹附近的一个皮革商家庭, 大学时专修法律, 毕业后当了律师, 曾经任图卢兹议会顾问三十余年。

费尔玛在 30 岁后才从事数学研究, 由于他博闻饱学, 精通数种文字, 掌握多门自然科学知识, 又结交了笛卡儿、梅森、惠更斯等著名学者, 经常书信往来, 讨论数学问题, 因此他的成就诸多。可惜生前较少发表论著; 多数成果留在手稿、通信或书页空白处, 死后才由儿子整理汇集成书, 在图卢兹出版, 才被后世誉为“业余数学之王”。

费尔玛也是解析几何的一位创立者。从他与帕斯卡以及罗伯瓦尔的通信中可知, 早在笛卡儿的《几何学》发表以前, 费尔玛已经提出了研究曲线问题的一般方法, 他从希腊几何学的成就出发, 用他所提出的一般方法, 对阿波罗尼关于轨迹的某些失传的证明作出补充。1630 年他把这一工作写成《平面与立体轨迹引论》的小册子。可惜它被拖延到了 1679 年才出版, 那时费尔玛已经死了 14 年。

费尔玛通过与帕斯卡的通信讨论赌金分配问题,得出正确解答,与帕斯卡、惠更斯一起被誉为概率论的创始人。

17 世纪的数论几乎是费尔玛的天下,证明和提出许多命题,如形如 $4n+1$ 的素数均能唯一地表示为两个平方数之和;如果 P 是素数, a 是正整数,则 $P \mid (a^p - a)$ (费尔玛小定理)等。

著名的费尔玛大定理是指方程 $x^n + y^n = z^n (n > 2)$ 没有正整数解。费尔玛在页边写道:“我发现了这定理的一个极妙的证法,但页边太窄,写不下”。但是,这一极妙的证法显然有误。此后的三百余年,无数数学家为之奋斗,始终是一悬案。1993 年 6 月,在美国普林斯顿工作的数学家 A·怀尔斯(Wiles)和英国数学家 R·泰勒(Taylor)宣布已证明了费马的猜想。但证明中有些地方不妥,经过改进之后,在 1994 年获得世界公认。

第二节 牛顿、莱布尼兹发明微积分

自笛卡儿创立解析几何之后,变量进入了数学。下一个划时代的数学成就便是微积分的诞生。英国的牛顿和德国的莱布尼兹几乎同时完成了这一创举。但是,他们并不是在平地上创造这一业绩的。许多微积分的先驱工作者为他们铺平了道路。

费尔玛是最早应用了微分学方法的一位学者。1629 年,他在《求最大值和最小值的方法》一文中,用一个例子说明他的方法。问题是:已知一条线段,要求出其上的一点,使被该点分成的直线段的两部分,所构成的矩形面积最大,他设线段长为 B ,一部分为 A ,则另一部分为 $B-A$,矩形面积为 $AB-A^2$,然后用 $A+E$ 代 A ,另一部分为 $B-A-E$,矩形面积遂成 $(A+E)(B-A-E)$ 。费尔玛认为,当 A 的长度恰为最大值

时,这两个值应相等(运用了几何观察),即

$$(A+E)(B-A-E)=AB-A^2。$$

这可整理为 $BE-2AE-E^2=0$,约去 E ,得 $B=2A+E$,略去 E ,得 $B=2A$,这就是说,正方形将获得最大面积。这一想法,与微分学的想法非常接近。

英国数学家巴罗(I. Barrow, 1630~1677)是牛顿的老师,他提出用微分三角形来求切线,其基本思想和费尔玛差不多,也是先将 x 扩充为 $x+\Delta x$,然后代入函数,最后再略去 Δx 。

积分学的工作,则由求面积开始。早在古希腊时期,阿基米德就求过抛物线下的弓形面积。我国刘徽的割圆术,也是同一思想。更有系统的工作有开普勒,他在1615年的《测量酒桶体积的新科学》一书中,把曲线形看成边数无限增大的直线形,圆的面积就是无穷多个三角形面积之和。意大利数学家卡瓦列里(B. Cavalieri, 1598~1647)在1635年出版《连续不可分几何》,把曲线形看成无限多条线段(不可分量)拼成的。这一些,都为后来的微积分学的诞生作了思想上的准备。

牛顿一生为科学事业做出了巨大的贡献,人们常把他偶像化,英国诗人蒲普(Alexander Pope)在诗中说:“宇宙和自然的规律隐藏在黑夜里,神说:‘让牛顿降生吧!一切都会是光明的’”而牛顿却说:“我不知道世人对我怎样看法,我只觉得自己好像是在海滨游戏的孩子,有时为找到一个光滑的石子或比较美丽的贝壳而高兴。而真理的海洋仍然在我的前面而未被发现。”“如果我所见的比笛卡儿远一点,那是因为我站在巨人们的肩上的缘故。”这就是牛顿。

艾萨克·牛顿(Isaac Newton, 1624~1727),1624年圣诞节生于英格兰乌尔斯托帕的一个农民家庭。对他的早年

学生时代的生活,世人所知甚少,似乎没有什么迹象可预示他的一生和工作将会给人类带来新的光明,将会在文明史上开创一个新时代。他于1661年夏天入剑桥大学三一学院,1665年初获文学学士学位。期间,他攻读了欧几里得的《几何原本》及笛卡儿、开普勒等人的数学和物理著作。他的才智开始显露,并被他的老师巴罗所赏识。1669年巴罗辞去他的教授职位,举荐牛顿作为他的继承人,并坦然宣称牛顿的学识已经超过自己,一时被传为佳话。现在剑桥大学的三一学院牛顿雕像之北,也立有巴罗的雕像。此后,牛顿就在剑桥大学任教,直到1696年去担任伦敦造币厂总监。

牛顿一生的重要转折点是1665年,当时伦敦流行鼠疫,波及剑桥。牛顿被迫回到家乡。在那里他终日思考各种问题,运用数年来获得的前人知识和自己的智慧,奠定了为之奋斗一生的三大成就(微积分、光的性质和万有引力)的基础。后来,当他追忆这段岁月时,他说:“当年我正值发明创造能力最强的年华,比以后任何时期更专心致志于数学和哲学。”他意识到了引力的平方反比定律,获得了解决微积分问题的一般方法,通过光学实验作出了划时代的发现,即白光是由各种颜色的光混合而成的。但牛顿并未将这些成果立即公诸于世。牛顿年轻的时候,其研究论著硕果累累,但他都要反复深思熟虑后,才肯公布于众。牛顿关于微积分的手稿表明,大约在1665年秋天,他已能用“0”表示无限小增量,求出瞬时变化率。后来,牛顿把变量 x 称为流量, x 的瞬时变化率称为流数,整个微积分学便称为流数术。1687年7月,牛顿用拉丁文发表了他的巨著《自然哲学的数学原理》,该书是第一本公开载有牛顿微积分思想的书。1669年在朋友中散发的《运用无穷多项的分析学》直到1711年才出版,这是他的第一部关于微积分

的专著。写于 1671 年的《流数法和无穷级数》是牛顿对其微积分思想所作的更明确的说明和广泛的应用,但出版更晚,一直到他去世后的 1736 年。在 1676 年写的《求曲边形的面积》中牛顿引入了最初比和最后比的概念。这篇论文作为《光学》的附录发表于 1704 年。由于那时还没有专门的数学杂志,所以在数学上的发现通常交流于个人之间的信件和私人散发的手稿之中。因而牛顿对纯粹数学(包括微积分)的贡献生前大都没有公开,到了死后,才由后人整理发表。这项工作一直经历了 240 年才算告成,1967 年,由剑桥大学出版社分八卷陆续出版,名为《艾萨克·牛顿数学论文集》。

1727 年牛顿去世,被葬于伦敦威斯特敏斯特大教堂,葬仪极其隆重。正如法国文学家伏尔泰所说:“我曾见到一位数学教授,只是由于他贡献非凡,死后葬仪之显赫犹如一位贤君。”

莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646~1716)世人称他是一个千古卓绝的大智者、哲学家、自然科学家、数学家。

莱布尼兹生于莱比锡的一个教授之家,8 岁丧父。父亲是一个道德哲学教授,丰富的藏书为莱布尼兹的学习提供了良好的条件,从童年起他就利用这些书自学了拉丁文、希腊文以及许多哲学著作,对数学也产生了兴趣。15 岁那年他进入莱比锡大学专攻法律,后又取得哲学学位。1666 年他以《论组合的艺术》一文获阿尔特道夫大学哲学博士学位,并被推荐当教授。可是莱布尼兹拒绝了。1667 年他到梅因兹(Mainz)大主教手下工作,并担任美因茨选帝候的外交官,1672 年出使巴黎,在那里度过了此后四年的大部分时间。他在巴黎结识了惠更斯等杰出的学者,对数学的兴趣与日俱增。1675 年到 1676 年

之间他发明了无穷小算法。当时他并不知道牛顿关于同一问题已完成了“流数术”。

莱布尼兹通过几何上求曲线切线的研究得到一般的微分理论,把切线斜率看成是无限小增量 dy 和 dx 之比。1675 年 10 月 29 日的手稿中,他引用符号“ \int ”表示变量的求和过程,并看到 d 和 \int 是互逆的运算。1676 年 11 月,他给出了一般性法则

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx, \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}。$$

牛顿和莱布尼兹对微积分作出了同样重要的贡献。牛顿从力学着眼,考虑变量的运动速度——流数。注重应用,对后世的科学发展,影响很大。他的工作完成得较早,但发表很晚。莱布尼兹则从几何上入手,偏重运算法则的探讨。引用的符号 d 和 \int 一直使用到今天。莱布尼兹的工作虽较牛顿稍晚,但发表的时间却较早。后来,英国和欧洲大陆的数学家为两人发明微积分的优先权进行过长期的争论,其实没有多少意义。英国因此不承认莱布尼兹的工作以及欧洲大陆的发展,导致一段时间内数学上的落后,更是令人遗憾。

牛顿和莱布尼兹的超越前人的贡献,不是在于发现求切线和求面积具体方法,而是给出了一般的无穷小算法,同时又找出了微分和积分之间的互逆关系。这一深刻的思想,已成为人类文明中的瑰宝。

第三节 大步前进的欧拉 七桥问题 多面体的欧拉公式

18 世纪的数学,可以说是欧拉的时代。欧拉(Leonhard

Euler, 1707~1783)是数学史上最多产的数学家。他在微积分学的基础上大步前进,用他特有的数学直觉,创造出无数的数学成就,欧拉的论著浩如烟海,几乎涉及所有的数学分支,在每本数学著作中都可以看到欧拉的名字。从初等几何的欧拉线,多面体的欧拉定理,立体解析几何的欧拉变换公式,四次方程的欧拉解法,到数论中的欧拉函数,微分方程的欧拉方程,级数论的欧拉常数,变分学的欧拉方程,复变函数论的欧拉公式等等,多不胜数。

欧拉于 1707 年 4 月出生在瑞士巴塞尔的一个牧师家庭。父亲为了让儿子继承自己的事业,把欧拉送进了巴塞尔大学学习神学。但是欧拉在大学中却迷恋上了数学,并被德高望重的数学教授约翰·伯努利(Jean Bernoulli, 1667~1748)所看中。伯努利真诚而又耐心地劝说欧拉的父亲,他说:让您的儿子作村里的牧师,这是没有道理的,欧拉具有数学的天才,由我来安排、指导他的学习吧!”从此,欧拉师从约翰·伯努利和丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli),开始了他的数学生涯。

1726 年 19 岁的欧拉写了一篇关于船桅杆的论文,一举获得了巴黎科学院奖。1727 年由于丹尼尔·伯努利的举荐欧拉到了彼得堡科学院,从事数学研究工作。可惜好景不长,由于俄国女皇喀德林一世的逝世,俄国陷入了混战,社会一片混乱。虽然欧拉到处躲避,但仍然终日不得安宁。那时的欧拉只要有一线可能,就排除一切干扰,竭尽全力进行研究。由于过度疲劳和取暖柴禾的烟熏,欧拉的右眼在 1735 年失明了。

1741 年,德国的腓特烈大帝邀请欧拉到柏林科学院工作。欧拉欣然接受邀请,为能有机会脱离动乱的俄国而高兴。由于柏林各方面的条件都很好,欧拉的研究不断深入,连续公开发表了许多数学论著,他开始闻名于欧洲,不少年轻的数学

家慕名来到柏林,云集在他的周围。1744年腓特烈大帝任命欧拉为柏林科学院数学研究所所长。

1762年,俄国喀德林二世继位。这位女皇很注意发展自然科学,极会网罗人材。1766年她邀请欧拉重返彼得堡科学院,从此欧拉一直在彼得堡科学院工作,直至去世。

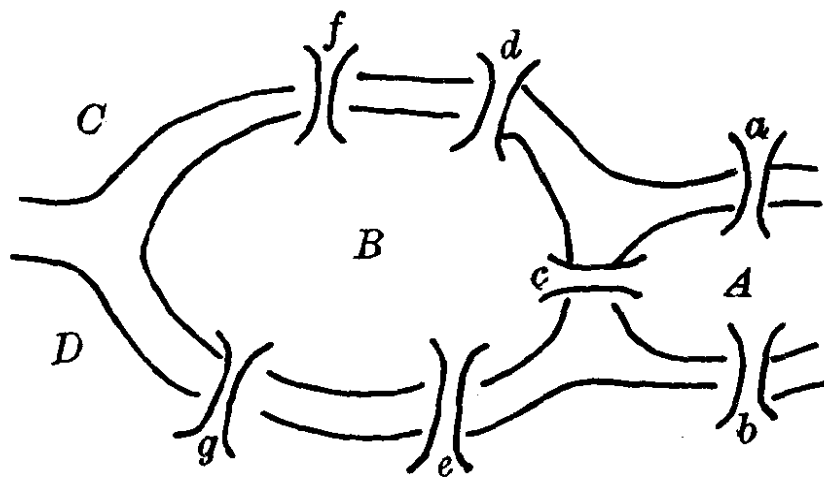
欧拉回彼得堡不久,左眼也失明了,处境十分艰难。然而他却以惊人的毅力和特有的超人记忆力克服了这些困难,不断地深化他的研究。1771年彼得堡的一场大火吞没了欧拉的全部藏书。双目失明的欧拉本人也险些葬身火海,幸亏瑞士朋友别尔·古利姆的舍身相救,才得以幸免。火灾过后,女皇给欧拉拨了一套华丽的新房并让他作了白内障手术。但好境不长,欧拉终究没有能逃脱双目失明的厄运。失明期间,他口述了几本书和400篇左右的论文。

欧拉罕见的记忆力和敏捷的心算力是他成功的一个原因。年老的时候能复述年轻时代的笔记内容,即使对高等数学有时也可以用心算来完成。有一次欧拉的学生把一个比较复杂的收敛级数的前17项加起来,算到第50位数字时相差了一个单位,欧拉竟用心算将错误找了出来。法国天文、物理学家阿拉哥说:“欧拉做计算好像一点也不费力,正如人呼吸空气,或老鹰乘风飞翔一样。”

1783年9月7日,欧拉与家属边吃饭,边谈论赫斯科尔(Sir William Herchel, 1738~1822)在1781年发现天王星的故事。当他正兴致勃勃地谈论其运行轨道的问题时,突然,他叼着的烟斗掉了下来……,欧拉的生命结束了。

拓扑学的萌芽也可以追溯到欧拉,欧拉于1763年提交柏林科学院的一篇论文,即著名的哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题。这是拓扑问题的第一个初等例子。

哥尼斯堡是著名哲学家康德(Immanuel Kant, 1724~1804)的出生地,它是座历史古城,城中有一条河,叫布勒格尔河,横贯城区,河上搭有7座桥,河中有座小岛。

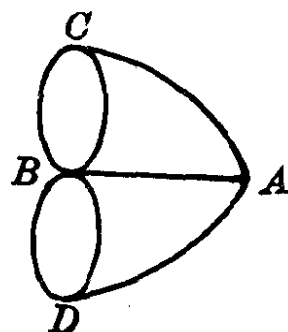


(1)

图 3-1

所谓的哥尼斯堡七桥问题就是:能否一次通过全部七座桥、且每桥只过一次?

欧拉对这个难题产生了兴趣,他将被河分开的 A、B、C、D 四个地区看作四个点,这四个点通过七座桥做连线构成图 3-1(1),于是七桥问题就变成图 3-1(2)能否一笔画下来的问题。这原是一个智力游戏问题,欧拉处理问题的方式却具有拓扑意义,



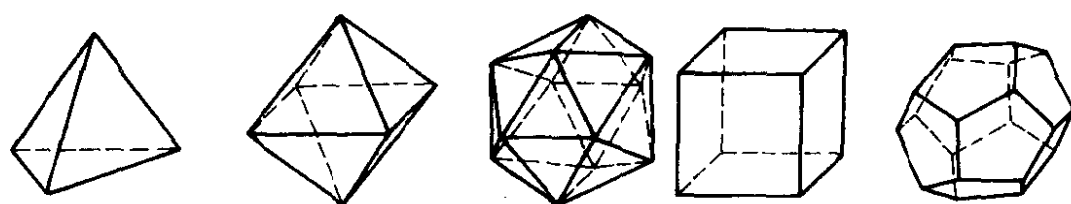
(2)

图 3-1

他简化了这一问题的表示方法,用点代表陆地,用线段或弧代表桥,将问题改变成:能否一笔画出这个图。欧拉圆满地解决了这个问题:如果从某一点出发最后再回到这一点的话,则连接这一点的线数必须是偶数。他证明了:当且仅当,图是连通

的,以及每个点都与偶数条线相关联时,才存在上述的路线。图 3-1(2)虽然是连通的,但是每个点都与奇数条线相关联,因而要连续不重复地通过七座桥是不可能的。欧拉关于任何一组给定的点和线(弧)能否一笔画出的判别法则。成了组合拓扑学的先声。

1750 年,欧拉得到了后人以他名字命名的“多面体欧拉公式”。欧拉发现,不论什么形状的凸多面体,其顶点数 V 、棱数 e 、面数 f 之间总有 $V - e + f = 2$ 这个关系。从这个公式可以证明正多面体只有五种,即:正四面体、正八面体、正二十面体、正六面体、正十二面体(图 3-2)。值得注意的是,如果多面体不是凸的而呈中空的镜框形(图 3-3)也不管框的形状如何,总有 $V - e + f = 0$ 。这说明,凸形与框形之间有比长短曲直更本质的差别,通俗的说法是框形有个洞。



正四面体 正八面体 正二十面体 正六面体 正十二面体

图 3-2

现在我们对凸形与框形多面体进行连续变形(不割断的变形),凸体的表面可以变为球面,框形的表面可以变为环面(轮胎面)。但这两者本身却不能通过连续变形互变。在连续变形下封闭的曲面有多少种不同的类型?怎样鉴别它们?这曾是 19 世纪后半叶拓扑学研究的主要问题,也是现代拓扑学研究的出发点。

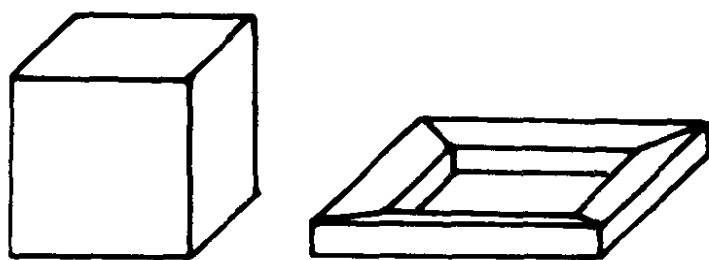


图 3-3 凸形与框形

第四节 高斯和柯西

从 18 世纪末到 19 世纪,数学的内容发生了显著的变化,以原有的数学概念为基础,并突破传统数学的框框,创立新概念、新的数学,数学开始进入新的发展阶段。其中最杰出的代表人物是德国的高斯和法国的柯西。高斯(Karl Friedrich Von Gauss, 1777~1855), 1777 年 4 月 30 日出生在德国的布伦兹维克,父亲是一个砌砖工人,没有什么文化,舅父却是一个很有才能的人,经常教给高斯一些知识,对幼年的高斯影响很大。

还是在幼年的时候,高斯就显出了他的数学才能。据说在一个星期六的晚上,父亲在计算工薪帐目,高斯在旁观看,父亲计算完后,高斯立即指出其中的错误,父亲惊讶得说不出话。高斯 10 岁那年,教师让学生将数 1、2、3、…连续相加,一直加到 100,即 $1+2+3+\cdots+100$,高斯没有象其他同学那样急着相加,而是仔细地观察、思考,当他发现: $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101\cdots$

$50+51=101$ 总共有 50 个 101 时,他立刻得到:

$$1+2+3+\cdots+98+99+100=50\times 101=5050.$$

当高斯将这份正确答卷交给老师时,老师还认为小高斯准是瞎写一通或根本没有做。其他学生过了很长时间才交卷,而且没有一个是算对的。老师看着小高斯的卷子,惊讶得说不出话,小高斯“神童”的美名不胫而走。村中的一位伯爵知道此事后,立即出钱资助高斯,将他送入附近最好的学校进行培养。

中学毕业后,高斯进入了哥廷根大学学习。刚进入大学时,他还没有立志专攻数学,但听了数学教授卡斯特纳(Abraham Gattself Kastner, 1719~1800)的讲课之后,高斯决定研究数学。卡斯特纳本人并没有多少数学业绩,但他培养高斯的成功,足以说明一名好的教师同样是重要的。

高斯从哥廷根大学毕业后,一直坚持数学研究工作。1807年,俄国皇帝和哥廷根天文台同时招聘他去工作,前者工作的地方是著名的彼得堡科学院。高斯选择了后者,后来荣任哥廷根天文台台长,一直工作到他逝世为止。

高斯对近代数学起了奠基的作用。他在历史上的影响可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列。高斯 18 岁时发明最小二乘法,19 岁时发现了正 17 边形的尺规作图法,并给出可用尺规作出正多边形的条件,解决了这个欧几里得以来一直悬而未决的问题。对代数学,高斯证明了代数基本定理,即 n 次代数方程式在复数域内都有 n 个根。对数论,他的《算术研究》奠定了近代数论的基础,该书不仅在数论上是划时代之作,就是在数学史上也是不可多得的经典著作之一。高斯在 1816 年左右就发现了非欧氏几何的原理(详见下节)。他还研究了复数,提出所有复数都可以用平面上的点来表示,所以后人将“复平面”称作为高斯平面,高斯还利用平面向量与复数之间的一一对应关系,阐述了复数的几何加法与乘法,为向量代数学奠定

了基础。高斯还深入研究了复变函数,在位势理论上、椭圆函数论上、数论上有很多贡献。1828 年高斯出版了《关于曲面的一般研究》,全面系统地阐述了空间曲面的微分几何学。并提出了内蕴曲面理论。高斯还在天文学、电磁学、光学等方面有极高成就。但不少工作在他生前都没有发表出来。

高斯一生共发表 155 篇论文,他对待学问十分严谨。他对问题的探求,总是追根求底,从不敷衍,把直观的概念作为入门的向导,然后试图在完整的逻辑体系上建立其数学的理论。在求解数学问题时,都有充分的理论根据,最后才得出结论。奇怪的是,高斯的论文中从不详细地写明思路,人们很难理解他的数学思想。正如有的人说:“这个人,象狐狸似的,把沙土上留下的足迹,用尾巴全部扫掉。”

高斯走完了他 78 年的人生旅程,于 1855 年 2 月 23 日在哥廷根逝世。人们为了纪念这位伟大的数学家,为他建立了一个底座为正 17 边形的纪念像。继高斯之后担任教授的是狄利克雷(Dirichlet, 1805~1859)。接替狄利克雷则是黎曼(Riemann, 1826~1866)。他们都是世界著名的数学大家。哥廷根大学的数学传统一直继承下来,于 20 世纪初更形成了世界数学中心(详见第四章)。

19 世纪的法国数学也有许多杰出人物。1811 年,傅立叶(Frier, 1768~1830)向巴黎科学院提交一篇关于热传导的论文,其中有把函数展为三角级数的论述,这一工作在微分方程,函数论,分析学等许多方面产生了深远的影响,泊松(Poisson, 1781~1840),勒让德(Legendre, 1752~1830),贝塞尔(Bessel, 1784~1846)等,都是分析方面的杰出学者。法国的几何学派是蒙日(Monge, 1746~1818)和他的学生们开创的,射影几何,画法几何,微分几何等学科,由于建筑工程和

机械制造的推动得以建立。但是,法国数学学派中最杰出的人物当推柯西。

柯西(Augusti-Louis Cauchy, 1789~1857)出生于巴黎,从小就接受了良好的教育,他的父亲是一位律师和高级行政官员,也是他的启蒙教师。早年,柯西专攻古典文学,1805年后分别就读于多科工艺学校和道路桥梁工程学校,学习工程。由于身体不太好,受拉格朗日等人的影响把精力转向数学。1816年,当蒙日等被王室驱逐出科学院时,柯西却被任命为院士,这对他的声誉有负面影响。当时他已是多科工艺学校的教授,后来又担任过巴黎大学和法兰西学院的教授。柯西在政治上是个忠实的保皇党员,1830年法国革命后他因拒绝宣誓效忠新政府而流亡到国外,1838年才返回巴黎,恢复了在科学院的学术活动。1848年政变后的第二共和国宣布取消宣誓效忠的法令,他重新得到了巴黎大学的职位,当1852年拿破仑三世再次颁布效忠誓词时,豁免了他和物理学家阿拉哥(J. Arago, 1786~1853)应做效忠宣誓的规定。1857年他因病在巴黎附近的小镇西阿(Sceaux)去世。

与高斯同时代的柯西为数学的发展做出了突出的贡献。分析学是柯西的主要研究领域。1814年,他向科学院提交了“关于定积分理论的报告”,开始研究复变函数论,以后几十年中他不断完善自己的研究,奠定了复变函数理论的基础。从20年代开始,他致力于分析的严格化,是这项伟大工程的开拓者。在微分方程方面,他首先开始讨论的基本问题:存在问题。在代数方面他发展了行列式理论。他的研究工作还遍及近似计算、无穷级数、微分几何、代数、数论、概率论、数学物理等数学学科。在自然科学方面,他在流体力学、弹性理论、光学、天体力学等方面都有突出的贡献。1816年,他以流体力学

方面的经典论文获得科学院的奖赏。更为重要的是他为弹性力学奠定了基础。柯西的研究成果是丰硕的,有大批概念和定理以他的名字命名,在弹性理论中尤多,这是对他的出色贡献的奖赏。

柯西是多产的数学家,发表论文在 800 篇以上。1882 年开始出版《柯西全集》,共有 27 卷。

第五节 非欧几何的出现 非欧几何的模型

两千多年来,人们一直认为欧几里得几何空间是反映现实世界唯一正确的几何空间。19 世纪二十、三十年代非欧氏几何的诞生使人们从这一思想中解放了出来。在数学史中,很少有一个分支能像非欧氏几何那样对人类的认识史发生如此深刻的影响,人们常常将非欧几何引起的思想、变革与哥白尼的革命相比拟。建立非欧几何直接归功于高斯、波耶(Janos Bolyai, 1802~1860)、罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский, 1793~1856),其中著作最多并为确立和发展非欧几何而始终不渝的当推罗巴切夫斯基。

欧氏《几何原本》问世后,平行公理(常称第五公设)引起了数学家们极大的关注。这是因为公理应该最大可能的简单,使人明了而信服,而平行公理却显得陈述复杂且不够自明(第五公设:同一平面内一条直线与另外两条直线相交,若在某一侧的两个内角之和小于两直角,则这两条直线经过无限延长后在这一侧相交),此外在书中还出现得较晚。多少年来,不少数学家竭力试图从其他公理、公设中把它推导出来,结果都失败了。在这个过程中唯一的得益是找到了与平行公理等价的,然而更为简单陈述形式,如普罗克洛斯(Proklos, 410~485)

提出的“通过直线外一点能且仅能作一条平行直线。”19世纪初,一种革命性的几何观念在萌动:“欧几里得几何不是唯一描述物质空间的几何学,不同的公理基础上可以建立不同的几何学体系”。最先认识到这一点的是高斯。

高斯早在15岁时(1792年,就开始考虑第五公设。1816年左右,他已具有了非欧几何的基本思想,确信存在着不同于欧氏几何的另一种几何学。有的记载还表明,高斯还进一步考虑到这种新几何学的现实性。尽管高斯对几何学的本质问题有着深刻的理解,但他一直将自己的这一发现隐而不宣。原因是高斯过于谨慎。这种新的思想冲击了欧几里得几何的两千年权威,与人们常识相悖,尤其是构成了对当时盛行于欧洲康德哲学信条的挑战,这必然要遭受到世人的攻击和耻笑。高斯深知传统思想的顽固,在世人偏见造成的压力下退却了。这位被人颂之为数学之王的高斯,终于在有生之年未能给非欧几何的发展以根本的推动,令人遗憾不已。

与高斯的保守、胆怯相比,罗巴切夫斯基则是确立和发展非欧几何学的始终不渝的战士。罗巴切夫斯基出生在喀山的一个贫苦的公务员家庭。1807年进入喀山大学学习,后来成为该校的教授,直到担任该校的校长(1827~1846),一生都在喀山渡过。

罗巴切夫斯基大约在1815年开始研究平行公理问题,开始时和大多数人一样,相信平行公理是可以证明的。1823~1826年间,他与前人一样试图用反证法来证明它。他从平行公理的否命题出发,同时保留了欧几里得的其他公理,依照严格的逻辑推理进行推导,然而矛盾却没有出现,反而得到了一系列重要的结果。罗巴切夫斯基果断地放弃了关于欧几里得几何唯一性的传统观念,大胆地提出:“由平行公理否定命题

出发而得到的结果代表着一种新的几何学,尽管这种新几何学中的许多结论是令人惊异、甚至不可思议的。例如,在这种几何里三角形的内角之和小于两直角。但是它本身是无矛盾的,它可以同欧氏几何一样成立。”

罗巴切夫斯基于 1826 年 2 月 23 日,第一次公开了他的上述新思想,这个思想促使人类思维从直接经验的狭小范围内解放出来,激起了关于现实空间可能具有非欧氏几何性质的大胆思想。这一天现在公认为非欧几何的诞生日,他的报告《简要叙述平行线定理的一个严格证明》为第一篇论文。后来他又于 1829~1830 年在《喀山通报》上,以《几何原理》为题正式发表了他的研究成果,后人称它为世界上最早的一部公开出版的非欧几何文献。这个新思想是 20 世纪相对论产生的前奏和准备。后来的历史证明非欧几何所导致的思想解放对现代数学和现代科学有着极为重要的意义,没有这一进步,人类就不可能突破感官的局限而深入于自然的更深刻的本质中去。

和所有先知、先觉者一样,罗巴切夫斯基得到的是冷遇和嘲讽,甚至被人称之为疯子。然而他一直执著地进行研究和著述,1837 年用法文写成《虚几何学》,1840 年用德文写成《平行线理论的几何研究》。去世前他已双目失明了,但仍口述完成了《泛几何学》。

与罗巴切夫斯基同时,匈牙利的波耶也独立发现了非欧几何,那是 1823 年的事情。1832 年波耶将自己的研究成果以了附录的形式随着父亲的几何著作一起出版。同年老波耶将儿子的附录寄给自己的同学和朋友高斯征求意见,高斯很快回了信,称赞了波耶的工作,但又委婉地表示本人在更早的时候已经得到了同样的结果。

在上述的新几何里,三角形的内角和小于两直角,一般称之为罗巴切夫斯基几何,简称罗氏几何。1871年德国数学家F·克莱因改称其为“双曲几何学”,一直沿用至今。1854年,德国数学家黎曼(Riemann, 1826~1866)在《关于几何基础的假设》的演说中,又提出了一种既不是欧氏几何,又不是罗氏几何的非欧几例。这种几何采用公理“同一平面上任何两条直线一定相交”代替欧氏几何中的平行公理,对其余公理只是稍作改动,被称为“椭圆几何”。其中三角形的内角之和大于两直角。它和球面几何学相差无几,如果把球面的对顶点看成同一点,就得这种几何学。

黎曼概括地提出和建立了一种更广泛的几何学,后来称之为黎曼几何,罗氏几何与欧氏几何则是黎曼几何的特例。他提出了曲率概念来刻画欧氏几何以及各种非欧氏空间之间的差异。黎曼空间中,一般情况下,每一点的曲率是不同的,只有在特殊情况下才有恒常的曲率。恒常曲率的空间又可以分为三种:

- (1) 零曲率空间,即欧几里得空间;
- (2) 负曲率空间,即罗氏几何空间;
- (3) 正曲率空间,即椭圆空间。

黎曼的工作蕴含了极为丰富和深刻的思想,可惜他的演讲除了年迈的高斯以外没有人能听懂。

对于非欧氏几何的承认是在其创造者死后才获得的。意大利数学家贝尔特拉米在1868年发表了《非欧氏几何解释的尝试》。紧接着德国数学家F·克莱因在1871年认识到从射影几何中可推导出度量几何,这些度量几何是欧氏几何、二重椭圆几何、罗氏几何(双曲几何)、单重椭圆几何,并建立了非欧氏平面几何(整体)的模型。

这样非欧几何的相容性问题就归结为欧氏几何的相容性问题了。这些结果最终使非欧几何获得了普遍的承认。另一方面,人们也找到了非欧几何的一些模型,使人易于理解,消除了神秘。如图 3-4 所示,把一个圆看作非欧空间,圆内的点是非欧点,圆周上点为无穷远点,弦为非欧直线,过点 P 与非欧直线 AB 可作两条非欧直线与 AB 交于无穷远点(即平行),许多直线(如 CD)与 AB 不相交。

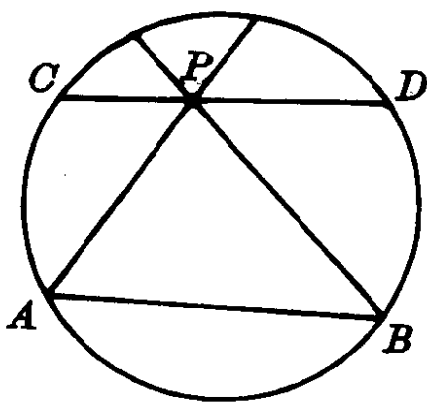


图 3-4

第六节 伽罗瓦与群论

在 19 世纪以前,解方程一直是代数学的中心问题。早在古巴比伦时代,人们就会解二次方程,但是系统地研究二次方程的一般解法并得到求解公式,则已是公元九世纪的事了。三次、四次方程的解法直到 16 世纪上半叶才得到。从此以后,数学家们转向求解五次以上的方程,一些著名的数学家,如欧拉、范德蒙德、拉格朗日、鲁菲尼等经过了两个多世纪的努力,但都未取得重大的进展。19 世纪上半叶,阿贝尔(Abel, 1802~1829)受高斯处理二项方程 $x^p - 1 = 0$ (p 为素数)的方法的启示,用高斯方法来研究五次以上方程的求解问题,终于证明了高于四次的一般方程不能用根式求解。他还发现了一类能用根式求解的特殊方程,这类方程人们称它们为阿贝尔方程。阿贝尔还企图研究能用根式求解方程的一般特性。可惜阿贝尔英年早逝,27 岁那年就在贫困交迫中离开了人世间。历史

将重任交给了伽罗瓦(Galois, 1811~1832), 伽罗瓦活得比阿贝尔更短, 死得比阿贝尔更惨, 然而他却完成了历史的使命, 开创了一门新的分支——群论。

伽罗瓦 1811 年 10 月 25 日生于法国的拉赖因堡, 父亲是一个自由主义思想家, 母亲也受过良好的教育, 从小是无忧无虑地长大, 然而在以后短暂的一生中却充满了不公正的遭遇和忧虑。

伽罗瓦在中学读书时就对数学产生了强烈的兴趣。1829 年他投考巴黎综合工科学学校, 口试时却与主考官发生了严重的争执, 因为受辱, 他用黑板刷打了主考官, 结果未被录取, 后来进入了巴黎高等师范学校学习。伽罗瓦很早就开始了关于方程理论的研究。1829 年在不知道阿贝尔工作的情况下, 写了关于代数方程可解性的论文。文中深入探究一个方程能用根式求解的本质条件, 注意到方程各个根之间的置换可以构成一种“自同构群”, 而方程有根式解的充要条件正是自同构群为可解群。这篇重要论文经由柯西交给法国科学院, 1830 年他再次将修改过的论文交给了科学院。伽罗瓦本希望能得到数学大奖, 但由于审稿人傅里叶(Fourier, 1768~1830)的去世, 手稿被遗失。1831 年在泊松(Poisson, 1781~1840)的要求下, 他又一次提交了关于代数方程解的论文修改稿, 然而却没有得到泊松的公正评价。许多其他的社会丑恶现象引起伽罗瓦对当时法国社会的强烈不满。他认为, 只有改变人才被冷遇, 庸人受恩惠的丑恶社会现象, 才能使自己得到解放。

1830 年 7 月 25 日, 由于查理十世颁发镇压自由的紧急命令, 引起了国民强烈地反抗, 第二天就爆发了数万人参加的革命运动, 在历史上称作为 7 月政变。伽罗瓦在思想倾向于共和主义, 加上对社会本来就强烈不满, 于是就拥护、歌颂、参加

了革命。结果先是被学校开除学籍,后是被关入圣佩拉吉监狱。1832年3月法国霍乱病流行,伽罗瓦虽然没有生病,却被允许保外就医。出狱不久,伽罗瓦即死于一场决斗,有人说这是一场骗局,因为伽罗瓦根本不会操作短枪。伽罗瓦在决斗前也意识到,这次是必死无疑。决斗前夜,他通宵达旦地疾书自己的数学成果,希望有朝一日能为天下所接受。他开头写道:

“我在解析学中,创造出了多种新成果。……我想把这些没有解决的问题,全部解决,展现在人们的面前。当写到没有时间了(Jen' ai pas le temps!)时,心里感到非常难受。”

即使是160余年以后的今天,这段文字仍然催人泪下。

遗书的主要内容,从数学方面看,都是重要成果。他提出了群的概念,用群的理论彻底解决了根式求解代数方程的问题,而且由此发展了一整套关于群和域的理论。后人为了纪念他,将这套理论称之为伽罗瓦理论。这个理论可以推导出五次以上的一般代数方程根式不可解以及用圆规、直尺(无刻度的尺)三等分任意角和作倍立方体不可能等结论。

伽罗瓦理论对近代数学的发展产生了深远影响,它已渗透到数学的很多分支中。

群是一种数学结构,在许多数学对象和日常生活中都会遇到。它的定义如下:

设 G 是一个集合,其上的元素之间定义有运算 $*$ 。如果 G 还满足:①存在单位元 e ,使得对任何 $x \in G$ 都有 $x * e = e * x = x$,②对任何 $x \in G$,都有逆元 x^{-1} 存在,使得 $x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$,则称 G 是一个群。

整数全体构成群。单位元是零。每个整数 a 都有逆元 $-a$ 。

由四个动作构成的集合 $G = \{\text{向右转 } R, \text{向左转 } L, \text{向后}$

转 H , 不动 I }, 若以接连动作表示两种动作的运算关系, 则 G 是群, I 是单位元。 $L^{-1}=R$, $R^{-1}=L$, $H^{-1}=H$

我们缅怀伽罗瓦的功绩, 称颂他为方程的根式求解理论作出了伟大的贡献。然而, 伽罗瓦用一种崭新的数学结构来观察数学, 为人类的思考提供了新的思维模式, 把数学的研究内容从数、式扩大到结构, 也许是伽罗瓦更为伟大的科学业绩。

第七节 海王星的发现 麦克斯韦尔方程

数学不仅能总结自然现象的运动规律, 用数学公式加以表达, 而且通过数学方法的计算, 可以预见自然现象的发生。早在 18 世纪, 英国天文学家哈雷 (Halley, 1656~1742)。就利用牛顿提出的万有引力定律算出哈雷彗星的运动轨道, 预测它约以 76 年为周期绕太阳运转, 结果得到证实, 更令人叹服的是海王星的发现。

事情的起因是对天王星轨道的观察。天王星的轨道是一个偏心率为 0.047 的椭圆, 距太阳的平均距离为 19.18 天文单位; 近日距为 18.3 天文单位, 远日距为 20.1 天文单位。轨道倾角为 0.73° 。公转周期约为 84.01 年。1830 年天文学家发现天王星的运动有 15° 的误差, 这引起了天文学家的推测, 在天王星轨道之外可能还有未知的行星在影响着天王星的运动。

英国数学天文学家亚当斯 (J. C. Adams, 1819~1892), 曾受聘为剑桥大学的天文与几何学教授, 1863 年起任天文台长。1844 年开始研究天王星的轨道, 1845 年 9 月, 他分别向剑桥大学天文台和格林威治天文台报告, 有一颗未知行星在运行, 但未受重视。第二年, 法国天文学家勒维叶 (Le Verrier,

1811~1877)根据周密的数学计算,预报未知行星的运行轨道以及各个时刻在轨道上的位置。1846年9月23日晚上,德国柏林天文台的加勒(Galle, 1812~1910)把望远镜对准了勒维叶所预报的位置,果然发现了这颗未知行星,这便是以后被命名的海王星。太阳系共有九大行星,人们用肉眼早就发现了金星、木星、水星、火星、土星,加上地球本身,共有六个。1781年发现了天王星,它在良好天气情况下,用肉眼勉强可见。接下来发现的便是海王星,最后一颗行星——冥王星是1930年发现的。

用数学方法预言天文现象的成功,在科学史上是一件大事,数学的威力和价值,再一次得到确认和赞美。

用数学方程表示物理学现象是许多科学大师追求的最高目标,这方面的第一个伟大成功是牛顿力学,牛顿的三大定律,可以用数学公式加以表述,并以此为出发点,导出整个牛顿力学体系,下一个划时代的成就,便是英国的麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831~1879)。他于1873年出版的《电学和磁学论》中,总结19世纪中叶以前对电磁现象的研究成果,建立了一组偏微分方程。世称电磁学基本方程。从这个方程出发,可以推导出电磁波的存在并预言它以光速传播。这一方程的正确性,以后被实验所一一证实。这一理论,为人类的现代文明——电力,电报、电话、广播、电视,信息技术,控制技术等等的使用铺平了道路。

数学的应用,在19世纪继续向各个科学领域渗透。常微分方程,偏微分方程,积分方程,变分法等数学方法,对力学,电学,热力学的一系列基本问题给予回答。与此同时,随机现象的数学——概率论,也得到新的发展。

概率论是研究随机现象数量规律的数学分支,概率论的

历史悠久,而起源问题却是赌博。

16 世纪,意大利的一些学者开始研究掷骰子等赌博中的一些简单问题,例如比较两个骰子出现总数为 9 或 10 可能性的大小问题。17 世纪中叶,在法国出现了对赌博中较复杂问题的研究。正是对这些问题的研究,推动了数学的发展,使一门崭新的学科“概率论”诞生了。

1654 年的一天,爱好赌博的梅雷向其好友、著名的数学家帕斯卡提出了有关他赌博中碰到的各种问题。例如:“甲已双方是竞技力量相当的对手,每人各拿出 32 枚金币,以赌胜负。规定每取胜一次,得 1 分,最先获得 3 分者取得全部赌金 64 枚金币。如果由于某种原因,只赌了三次就必须停止,而这时,甲已得了 2 分,乙得了 1 分,问赌金如何分配?”这就是著名的“合理分配赌注问题”。帕斯卡于 1654 年 7 月 29 日写信给费尔玛,商量如何解决这类问题。研究这类问题的还有荷兰数学家 C·惠更斯。他们用排列组合的方法来进行研究,其方法是不直接计算赌徒赢局的概率,而是计算期望的赢值,从而导致了现今称之为数学期望的概念。他们解决了“合理分配赌注问题”、“输光问题”等等,为概率的历史,留下了重要的一页。

1657 年惠更斯发表论文《关于骰子游戏或赌博的计算》,正式建立了概率和数学期望等重要的概念,揭示了它们的基本性质和演算方法,从而塑造了概率论的雏形。

使概率论成为数学的一个分支的真正奠基人则是雅各·伯努利,因为他建立了概率论中的第一个极限定理,即伯努利大数定律。这个定律将建立在经验之上的频率稳定性推测进一步理论化了。从此,由对特殊问题的求解,发展到了一般理论的概括,为这门科目的成熟奠定了基础。此外,雅各·伯努

利又将排列组合系统化,理论化。

1718年,法国数学家棣美佛发表了《机遇理论》,在这部著作中揭示了概率乘法法则,阐述了“正态分布”和“正态分布律”等重要概念,为概率论建立了新的理论并奠定了基础。

拉普拉斯(Laplace, 1749~1827)对18世纪的概率论做了全面的总结,使古典概率论达到了高潮。高斯在研究测量的误差理论时提出了“正态曲线”这个术语。泊松从研究概率论的应用入手丰富了这一理论。1825年,法国开始公布审判程序的年度统计结果,1837年,泊松发表了《对审判概率的研究》一书,以法国1825~1833的审判结果为材料研究概率论在法庭判案中的应用。他推广了拉普拉斯等人的极限定理,并开始使用“大数定理”这个术语,还提出了现在所谓的泊松分布律。泊松特别强调概率论在社会道德和伦理方面的应用。切比雪夫(Chebeshchev, 1821~1894)于1866年提出了一般的大数定理,并培养了一批有名的学生,为概率论在俄国的发展奠定了基础。布鲁塞尔天文台的奠基者、比利时的凯特勒(L. A. J. Quetelef, 1796~1874)把概率论引入了统计学,奠定了数理统计的基础。

第八节 数系的历史发展

人类从认识自然数开始,在古埃及,古巴比伦,古代印度和中国,已先后认识了分数、负数,掌握了有理数系。古希腊时代的毕得哥拉斯学派,已触及无理数。经过漫长的中世纪,实数已为人们所接受,牛顿——莱布尼兹创立微积分的时候,就以实数为基础。但是,当时的实数理论并不严格,所以微积分的基础也不严格。1545年,意大利的卡丹(Cardano 1501~

1576)遇到负数开方,不得不面对复数,但始终不为数学家所接受,一直被看作“虚数”,“想象的数”。

19 世纪的数学,对实数和复数的严密理论终于完成了,这为整个数学的严密化提供了基础,与此同时,比复数更广的四元数系,以及公理化的自然数系,也先后问世,数系的理论得以全面地系统地获得发展。

一、复数系的建立

1797 年,挪威的维赛尔(C. Wessel, 1745~1818)在平面上引进虚轴,以实轴和虚轴所确定的平面上的向量表示复数,不同的向量对应不同的点,因而复数表示也不同。他还用几何术语定义了复数和向量的运算,建立了平行四边形法则。实际上,维赛尔已经揭示出复数及其运算的几何意义,但他的文章在当时未被人们注意。1806 年,瑞士的阿贡(Argand, 1768~1822)把复数表示为三角形式: $r(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)$,并把它与平面上线段的旋转相联系,如 $\sqrt{-1}$ 和 $-\sqrt{-1}$ 分别被看成是单位线段顺时针和反时针旋转 90° 的结果。高斯在证明代数基本定理(1799 年、1815 年、1816 年)和研究双二次剩余理论(1831 年)中应用并论述了复数,他把复数和平面上的点一一对应,引进了“复数”这个名词并以 i 这个记号表示 $\sqrt{-1}$ 。高斯已完全掌握了复数的几何理论。上述工作建立了复数的直观基础,但它是依赖于平面上的点或有向线段的。爱尔兰的哈密顿(W. R. Hamilton, 1805~1865)通过把复数看成实数对 (a, b) 而克服了它对几何直观的依从。1837 年,他用实数序对定义了复数的运算,并说明复数满足实数的运算规律。实数 a 被看作是特殊的复数 $(a, 0)$ 。这样,数系从实数向复数的扩展基本完成了。

二、四元数的发现

复数系是解决平面向量和转动的一个有力工具,但在解空间问题时却受到了限制,因为它仅是二维的。于是数学家又开始寻求能够很好地适合三维空间的新的数类,经过艰苦的努力,英国的哈密顿(Hamilton, 1805~1865)首先有了新的突破,提出了四元数。他是一位数学家和物理学家,在物理上以建立“哈密顿原理”而闻名。起初他试图建立三元数序,但失败了。1843年他提出了四元数,后来在《四元数讲义》(1853)和《四元数基础》(1866年出版)两书中做了进一步的论述。一个四元数是一个有序四元数组 (a, b, c, d) 或具有 $a+bi+cj+dk$ 的形式,其中 a, b, c, d 是实数, i, j, k 与复数中的 i 一样是基本单元。四元数的 a 称为数量部分,其余的称为向量部分。向量部分的三个系数可以看成是一点的笛卡尔坐标, i, j, k 的方向与三个坐标轴的方向相同。四元数的加减法与复数类似,也是对应的部分相加减,在乘法中,单元的运算如下:

$$i^2=j^2=k^2=-1, \quad jk=-kj=i,$$

$$ki=-ik=j, \quad ij=-ji=k。$$

四元数的乘法满足结合律,这是由哈密顿本人证明的,但他放弃了交换律。这表明,两个四元数的乘法次序不能交换。这种数系,在日常生活中难以遇到。但是,这个大胆的思想对代数学的影响极其深远,它为向量代数和结合代数的进一步发展打开了大门。1847年,凯利(Cayley, 1821~1895)给出了一种新的超复数,把四元数推广到八元数,其单元为 $1, e_1, e_2, \dots, e_7$ 。一般的八元数为:

$$x=x_0+x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_7e_7。$$

八元数的乘法不仅不满足交换律,而且也不适合结合律。数系

的推广,到八元数遂告终止。

三、实数理论的严密化

什么是实数?古希腊时发现正方形的对角线与边长不可公度,这就是无理数 $\sqrt{2}$ 。19世纪以前,人们直观地想象数量,对无理数的存在并不怀疑,至于它的系统理论并没有去深究。

19世纪非欧几何的产生,使人们不再简单地相信直观,而要追求理论上的严密。首先遇到的问题是:什么是实数。一个简单的回答是:有理数或无限不循环小数。这个回答是对的,但不严密,也不系统。比如,什么是无限?如何判断它不循环?两个无限不循环小数如何相加?相乘?等等,都不能自明地解决。显然,涉及无限的实数理论必须和处理无限的极限理论联系在一起。这也就是实数理论为什么是数学分析基础的原因。

柯西把无理数看作有理数列的极限。康托在此基础上更进一步,把实数看成有理数的基本序列,即收敛的有理数列。但不同的有理数列可以收敛于同一个实数,不是唯一确定的,于是就要用一些方法加以处理,相当啰嗦,最后完成了。另一种方法是戴德金(Dedekind, 1831~1916)创立的,他把实数看成全体有理数的一种分划,例如 $\sqrt{2}$ 就把全体有理数分为 A , B 两部分, A 由小于 $\sqrt{2}$ 的有理数所组成, B 为大于 $\sqrt{2}$ 的有理数所组成。然后,实数的加减乘除归结为“分划”之间的加减乘除,叙述起来也非常啰嗦,但是,经过他们的努力,这样建立起来的实数理论,确实是完全严格的,因而分析学的基础也就是完全严格的。19世纪的这项工作,影响十分深远。它的成功,在应用上并无多大意义,主要是数学理论上的建树,以及

科学方法上的贡献。

四、有理数系和自然数系的严密基础

无理数理论必须建立在有理数的基础之上,有理数系又是整数系的扩展,而整数则是由自然数扩充而成。因此,要追根问底,就必须建立有理数系和自然数系的严格理论。

德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass, 1815~1897)曾以无穷级数的方法来处理实数,并在实数系建立上作过许多贡献。另外,他在1859~1860年的演讲中,又提出把有理数建立在自然数基础上的思想,他以一对自然数定义一个正有理数,而把负有理数定义为一对正负整数,并正确地得到下述结论:只要承认了自然数,就可建立全部实数理论。他的这个思想表明,建立实数理论的最后一步是建立自然数系。

意大利的皮亚诺(G. Peano, 1858~1932)对自然数的处理方法体现了公理化的思想,是当时较流行的。皮亚诺是都林大学的教授,对数理逻辑、几何学、几何基础都有研究,且是算术化运动的积极实践者,在用公理建立数学体系方面做了不少工作。1889年,在《几何原理》中他给出了欧氏几何的一个公理集,1894年与人合作写了《数学的形式化》,收集“数学科学”的所有命题,并把它们归结为一组公理和定义。他对自然数的研究包括在1889年的《算术原理的新方法》中,此书使用了大量符号,使得论述清晰简洁。皮亚诺采用了集合与逻辑的观点来研究自然数,认为除了逻辑的概念和命题外,自然数的全部理论可以由三个基本概念和五个基本命题(公理)演绎出来,从而这三个概念和五个公理便成了全部纯粹数学的基础。

皮亚诺的三个基本概念是1、数、后继。后继是指自然数次序中一数的后一数,整数 a 的后继记为 a' ,如:1的后继是

$1'$, 2 的后继是 $2'$, 等等。五个公理是:

- (1) 1 是一个自然数。
- (2) 每一个自然数都有一个后继数。
- (3) 1 不是任何其他自然数的后继数。
- (4) 如果 $a' = b'$, 那么 $a = b$ 。

(5) 设 M 是一个由自然数组成的集合, 它包含 1 , 如果当 a 属于 M 时, a' 也属于 M , 则 M 包含所有自然数。(现在称为数学归纳法)

在上述公理的基础上, 皮亚诺定义了自然数的运算, 如加法定义为: 对每一对自然数 a 和 b , 有唯一的和 $a+b$ 存在, 使得 $a+1=a'$, $a+b'=(a+b)'$, 等等。他还研究了自然数的一些性质。通过自然数的理论, 皮亚诺又定义了整数, 再用整数定义有理数。有理数即是一个整数序对。这实质上与魏尔斯特拉斯的方法一致。

到了 20 世纪, 数系的叙述完全公理化了。人们从代数结构, 序结构, 拓扑结构的观点来阐述各种数系。最基础的是皮亚诺公理, 然后是整数环, 有理数域, 实数域, 复数域等等。于是数系的理论完全确立。

第九节 康熙与数学

康熙(1654~1722)是中国历史上很有作为的一位帝王, 我国封建社会后期的一位具有雄才大略和远见卓识的政治家和军事家。同时, 康熙皇帝还是一位数学学习的爱好者和传播者。

康熙在位时的中国, 由于封建制度的桎梏严重阻碍科学的发展, 数学的研究已是每况愈下, 对于欧洲数学的发展高潮

一无所知,无人知晓符号代数、透视理论、对数、数论、解析几何、微积分。中国的数学研究与世界先进水平相比已有了相当大的距离。不但如此,整个社会的盲目排外还相当厉害,然而康熙却能正确处理吸收外来文化。

清初之时,新旧历法之争相当激烈,后来竟酿出了杀身之祸。顺治二年摄政王多尔袞任命传教士汤若望(1591~1666,德国人)为钦天监,颁行汤若望的新历。旧派人物杨光先、吴明烜竭力反对。康熙三年(1664年)初,汤若望的助手、传教士安文思、利类思和中国教徒、钦天监历科官员李祖白合著《天学传概》一书,书中谎称,中国人类和文化皆来自西方。中国人的自尊心受到严重伤害。杨光先写了《不得已》对其进行义正词严的反驳,表现了爱国精神,但同时又全盘否定西方文化,因噎废食,宣布宁可使中夏无好历法,不可使中夏有西洋人。可以看出学术问题已与政治问题交织在一起了。同年十月,礼部将《天学传概》一书的作者及有关人员,包括汤若望、南怀仁(1623~1688,比利时人)、李祖白等逮捕入狱,最后将李祖白等五人处斩,汤若望被革职,杨光先取代汤若望为钦天监监正。新历法也被废止,复用旧历法。先进的科学技术因政治问题而被抛弃了,旧历法的错误却依然存在。

康熙亲政后,面对这一复杂的矛盾与斗争,首先虚心学习,他说:“…朕思己不知,焉能断人之是非,因自愤而学焉?”(《庭训格言·第86页》)。他最初向南怀仁、安多学习天文仪器的用法及算学知识,后来又向法国教士张诚和白晋学习欧几里得和阿基米德几何学。康熙听讲时屏息静听,反复思考,有时亲手绘图以证其理,并于次日进行复习,以免遗忘。如遇疑问,他必详加质询,直至明了为止。四、五月之后,他已基本掌握几何学原理,以至看到某个几何图形,便能立即指出证明

方法及所引用的定律。康熙还注意锻炼运算和操纵仪器的能力。当他已有了一定的判断能力后,就在康熙7年11月,将杨光先、吴明烜编造的康熙八年历书,向治理历法的传教士南怀仁征求意见。南怀仁劾奏这份历书“康熙8年闰12月,应是康熙9年正月,又有一年两春分、两秋分种种误差。”康熙对杨光先、南怀仁下谕“历法关系国家要务,尔等勿怀夙仇,各执己见”“务当平心考察,谁是谁非”(《天主教传行中国考》第307页),决定让他们进行辩论,各抒己见,辨明是非。由于双方争持不下,没有结果。康熙决定通过实际测验来辨明直曲。经观象台测验,“南怀仁所指,逐款皆符,而吴明烜所称,逐款不合”(《清圣祖实录》卷27第24、25页,卷28第6页)。最后康熙确认南怀仁历法是科学的,杨光先是盲目排斥西洋法,不修改历日差错,下令将杨光先革职,任命南怀仁为钦天监监副,复用新历法。

康熙通过处理新旧历法之争,深感一国之君,在科技方面也应通晓,取得发言权。他不仅向西方传教士学习,而且还向中国算学家梅文鼎学习,梅文鼎一家都通晓数学。康熙博采中西数学,亲自主持,由梅穀成等人编成一部初等数学百科全书式的著作《数理精蕴》,该书表明中国算学家已能消化和改造西方的数学成果了,当然,仅限于初等数学。

康熙还选拔一些有培养前途的年轻人,集中到宫中培养,皇子、皇孙则是当然培养的对象,亲自讲授几何学、算学。不过,数学的发展必须有社会条件的配合,以及生产发展的推动,单靠个人努力是不成的。康熙以后的清代帝王,就再没有这种数学兴趣,清代的数学,也就乏善可陈了。

第十节 清末的中国数学教育 李善兰

鸦片战争之后,清政府闭关锁国政策彻底失败,门户洞开,社会发生了“千古奇变”。面对帝国主义侵略,朝野有识之士力主改革教育。林则徐(1785~1850)反对当时教育的空疏无用,主张“师敌之长技以制敌”。魏源(1794~1857)自述写《海国图志》的目的是“为以夷攻夷而作,为以夷颖夷而作,为师夷之长技以制夷而作”,强调向西方学习科学技术。

1860年前后,统治阶级内部出现“洋务派”与“顽固派”之争。洋务派在维护封建帝王统治的前提下,兴办工厂实业,引进“西学”,形成了历史上的“洋务运动”。

洋务派的主要代表人物是奕訢、曾国藩、李鸿章、左宗棠、张之洞等人。其中奕訢是满人,即恭亲王,地位最高,对洋务教育和算学教育有过很大影响,值得一提。

看过电影《火烧圆明园》的读者,当会记得那个“小六子”。1860年10月,英法联军火烧圆明园时,咸丰帝逃往承德避暑山庄。正是这个“小六子”,恭亲王奕訢留在北京,以钦差大臣身份和英、法两国侵略军头目签订屈辱的《中英北京条约》和《中法北京条约》。1861年8月咸丰帝死于承德,东、西太后徽号为慈安、慈禧。同年11月,慈禧发动“辛酉政变”,“命恭亲王将载垣、端华、肃顺革去爵职,……严行治罪”。恭亲王奕訢是慈禧上台“垂帘听政”的功臣,当时自然权倾朝野,参与过许多政事。由于他总理各国事务,全权处理外交事务,签过不少丧权辱国的条约,常被人称为“投降派”。不过,恭亲王在革新教育方面办过几件实事。首先是在1862年8月20日,建议设置同文馆,培养外交方面的翻译人才。这是清政府第一所官办的学校。我们更感兴趣的是另一件关于数学教育的实事。

1867年1月28日，奕訢上奏折，请于同文馆内专设一馆，讲习天文数学。其中写道：“此次招考天文算学之议，并非矜奇好异，震于西人术数之学也。盖以西人制器之法，无不由度数而生。今中国议欲讲求制造轮船机器诸法，苟不籍西士为先导，俾讲明机巧之原，制作之本，窃恐师心自用，枉费钱粮，仍无裨于实际。……论者不察，必有以此举为不急之务者；必有舍中法而从西人为非者；甚且有以中国之人师法西人为深可耻者，此皆不识时务也。夫中国之宜谋自强，至今日而已亟矣！……中国所当学者以轮船、枪炮而论，雇买以应其用，计彻其源，法既明而用将在我。盖一则孰得孰失，不待辨而明矣。

[illegible]

……查西术之借根，实本于中术之天元。……且西人之术，我圣祖仁皇帝深黜之矣，当时列在台官，垂为时宪，兼容并色，智周无外，本朝掌故亦不宜数典而忘。况六艺之中数居其一。

……若夫以师法西为耻者，此其说尤谬。夫天下之耻，莫耻于不若人。……东洋日本近亦遣人赴英国学其文字，究其象数，为仿造……

在这场论战中,顽固派人多势众,奏折频上。5月16日崇实上折建议各省督抚推荐数学人才,不必拜洋人为师,和他们

“互相考证”即可。更有直隶州的知州杨廷熙，递上长篇奏折说“日夜思同文馆原奏，其事、其理、其言、其心，有不可解者十焉”。以十大问题兴问罪之师。最后，同治在6月30日的“上谕”，斥责杨廷熙“呶呶数千言，甚属荒谬”。总之，这场论争，由于皇帝的支持，以洋务派的胜利而告终。那么，论战之时已是慈禧垂帘听政之际，慈禧的态度如何呢？据 Frank Swetz 在《中国的数学教育》一书中提到，1867年5月5日慈禧圣谕：“学习数学与天文学是今日当务之急。”看来，同治的态度是慈禧支持的结果。慈禧亲政，使中国陷入无比深重的危机。但在同文馆内办天文算学馆这一点上，她总算没有支持顽固派，慈禧再次和恭亲王奕訢站在一起。

自从天文、算学馆获准成立，同文馆的课程大加扩充，许多自然科学，都逐渐地介绍进来。所以算学馆的成立，可以说是中国的官办学生正式接受西洋近代自然科学的起始。自此之后，同文馆不仅是所翻译学校，也是一所专科学校了。

同治6年(1867年)，洋务派在同文馆内兴办天文算学馆的论战中取得胜利之后，随即积极筹办。广东巡抚郭嵩焘举荐邹伯奇、李善兰到馆任职。邹伯奇(1819~1869)，广东南海人，精于天文历算，尤其在运用数学方法表述几何光学方面为人称道。接到调京旨意时，由于“向有肝病，时常苦痛，屡医未痊，实难领咨赴京”，终于未能到任，两年后便去世了。李善兰当时也有病，乃“乞不定限期，俟病势脱体，报国有日”。第二年，李善兰终于北上赴京，成为同文馆第一任算学教习。这是一个很不容易得到的席位。1868年同文馆一共13名教授(Professor, 旧译称教习)。9个是外国人。校长(总教习)是美国人丁韪良(W. A. P. Martin)教国际公法，副校长是物理教授(爱尔兰人)。其余7人的专业是解剖学，天文学，化学，法语，德语，

俄语和英语。另外 4 位中国教授,3 个是教中文的,惟有李善兰是数学教授,即除中文教授之外的 10 名教授中的唯一中国人。

李善兰(1811~1882),浙江海宁人。10 岁左右开始对数学感兴趣,自称“30 后所学渐深”。1845 年,他创立尖锥术,相当于求多项式和 $\frac{1}{x}$ 的定积分。这时,微积分尚未传入中国,是他独立发现的成果。更为重要的著作是《垛积比类》,大约完成于 1850 年前后。此书内容涉及现今的组合数学,颇多创见,堪称杰作。其中最负盛名的是驰名中外的李善兰恒等式:

$$\left(\frac{n+q}{q}\right)^2 = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \binom{n+2q-k}{2q}。$$

李善兰不仅在数学研究上有很深造诣,还在微积分学传播上建立了不朽功勋。1859 年,他和英国教士伟烈亚力(Alexander Wylie, 1815—1887)合译《代微积拾级》(原书为美国人罗密斯(E. Loomis)所著的 Elements of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus),这是中国出版的第一部微积分学译作。李善兰本人不懂外语,由伟烈亚力口译,李善兰笔述。但是李善兰并非只是抄录整理,而是基于对微积分学的深入理解以及中国传统数学的精到修养,进行了一番创造加工。特别一些名词的创立影响极为深远。例如:代数学,数学,横轴,纵轴,微分,积分,曲率,曲线,极大,极小,无穷,级数,根,方程式等等,至今一直沿用。日本亦以此书的名词为基础,以至中日的数学名词诸多相同。

李善兰生性落拓,潜心科学,淡于利禄。晚年官至三品,授户部正郎,广东司行走,总理各国事务衙门章京等高职,但他从未离开过数学研究与数学教育岗位,并一直在京师同文馆任算学教习,直至去世。以后又有席淦、王季同先后续任。当

时的学生很少。据 1878 年考试榜公布的名单,汉文算学共 22 名,洋文算学 11 名,共 33 名。1886 年,同文馆录取 150 名学生,其中算学 12 名。

至于课程的程度,今日看来实在不高。据《清会典》记载,凡算学,以加减乘除入门。然后学《九章算术》和八线(即三角学)并测量。此后为中国传统的天元术及西方之代数学,其中包括解方程,解三角形,以至微积分等算法。

算学人才的需要很多,只靠同文馆的培养是不够的。而且毕业生“或随带出洋,或升迁外省”,真正搞数学工作的人更是寥寥无几了。同治九年(1870 年)闽浙总督英柱、船政大臣沈葆楨奏称“水师之强弱,以炮船为宗,炮船之巧拙,以算学为本”。对数学的作用给予极高评价。他们希望科举考试中,增加算学科,以便使民间专精数学的士人,能通过考试而做官,成为国家所用的人才。这些意见虽然无人反对,却因惰性甚重,不思进取,同治年间一直未能办成。光绪元年(1875),主管科举的礼部正式提出“奏请考试算学折”。要求“若有资质明敏,愿学算法者,统归国子监算学照章学习。无论举贡生监及大员子弟,均准录取。其各省学政考试,仍一体录送科场,不阻其上进之路。”但因格于成例,此奏亦未实行。直至光绪 13 年(1887)御史陈琇莹奏准把算学列为科举科目,并规定二十名考中一名且至多不得超过三名。1888 年戊子科乡试报考算学者三十二人,照章取中举人一名,这是我国最早的一次把西学和中学同考。

1898 年,京师大学堂成立。学生上午读经,下午习科学,如格致,算术,化学,洋文等。1901 年,同文馆并入京师大学堂。1902 年,大学堂内设仕学馆(培养官吏)和师范馆。1904 年,添招师范生,共分四类:一类洋文,二类地理历史,三类理

化算术，四类博物。算学在京师大学堂并未专设一科，数学水平没有得到提高。清末的数学水平，并未能超过李善兰，进展之慢，令人扼腕长叹！

徐、利的欧氏几何译本，对当时中国知识界有一定影响，但能得其精神者，实少其人。阮元、李锐编《畴人传》时，虽也肯定了欧氏几何的优点是“以其不言数而颇能言数之理也”，稍得其要领。但同时又对徐光启批了一通：“徐光启至谓利氏（利玛窦）为今日之羲和，是何其言之妄而敢耶？天文算数之学，吾中土讲明而切究者代不乏人。自明季空谈性命不务实学……，于是西人起而乘其衰。然则但可云明（朝）之算学家不如泰西，不得云古人皆不如泰西也。”复古主义的思潮吞没了徐光启当年的热情。“几何即勾股”“代数即天元”，一切西方科学技术，中国古已有之，因此不必学习别人长处，只须从故纸堆去找就是了。乾嘉学派兴考据之风，更是这种复古主义的突出表现。

对《几何原本》的正确理解，须待李善兰才得以继续。他“年 15 读旧译六卷，通其义。窃思后九卷必更精微，欲见不可得，辄恨徐、利二公之不尽译全书也。”1852 年，李善兰来到上海，与伟烈亚力相约“续徐、利二公未完之业，……凡四历寒暑始卒業”。1857 年，《几何原本》后九卷得以正刊行。时距徐、利前六卷刊行整整二百五十年。当初徐光启预言“百年之后必人人习之”，他毕竟太乐观了。

《几何原本》后九卷的初刊本印数很少，后来原刻版也毁于战火。1863 年，李善兰前往安庆充任曾国藩的幕宾。曾国藩镇压太平天国得手之后，遂出资将前 6 卷和后 9 卷的《几何原本》一并在南京重刻刊行，时在 1865 年。忠于清王朝，剿灭太平天国的曾国藩，自有其反动的一面，但他也有主张学习科技，兴办洋务的进步改良的一面。曾国藩为这一全刻本的序言

写道：“《几何原本》不言法而言理，括一切有形而概之曰点、线、面、体…似乎《九章》立法之源而凡《九章》所未及者无不赅也。”他又“邮致三百金”，令李善兰“取篋中书尽刻之”，对数学表现出一种特有的重视。

1868年，李善兰被聘为北京同文馆天文算学馆总教习，《几何原本》也随之成为中国高等学府的必修课程。

西方近代科学著作，又译《奈端数理》（即牛顿《自然哲学的数学原理》）四册（未刊）。这是解析几何、微积分、哥白尼日心说、牛顿力学、近代植物学传入中国的开端。

李善兰与伟烈亚力翻译时采取的方式是由伟烈亚力口译，李善兰笔述，由于伟烈亚力仅粗通中文，所以李善兰出力是不小的。在翻译微积分《代微积拾级》时，李善兰创造了许多科学名词，这些科学名词还东传到日本。今天我们经常用到的“代数”“常数”“函数”“变数”“微分”“积分”“切线”“法线”“渐近线”等都出自他手。

第十一节 一些数学概念的历史综述

经过中世纪的沉寂和文艺复兴后一百年的犹豫。数学家们在十七、十八世纪冲破了古希腊的演绎框架，向自然界和社会生活的多方面汲取灵感，数学领域出现了众多崭新的生长点，而后都发展成为完整的数学分支，数学取得了巨大的进步。

解析几何、微积分、概率论、非欧几何群论、都是这一时期“使欧几里得几何相形见绌”的若干重大成就。这里我们力求从思想方法上对解析几何、微积分、概率论的产生与发展作一简介。

一、解析几何

解析几何的中心思想是：在方程 $f(x, y) = 0$ 和所有符合下述条件的点的轨迹（一般为一条曲线）之间存在着对应关系，这些点相对于两个互相垂直的轴的坐标 (x, y) 满足方程 $f(x, y) = 0$ 。

解析几何是由笛卡儿和费尔玛创立的。他们的思想是：

当在最后的方程中有两个需要求出的未知量时，我们就有一条轨迹，即这两个未知量制约的端点所描绘的直线或曲线段。

对他们来说，方程中的两个未知量不是指两个数，而是指两个线段。其中第一线段处于水平轴上，从参考点向右度量；第二个线段垂直地立于第一个线段的端点或斜向于水平轴方向画出，作为纵坐标。这时，纵坐标线段的端点描绘出对应于给定方程的曲线。事实上，他们两人论述的都是“纵坐标几何”，而不是坐标几何。

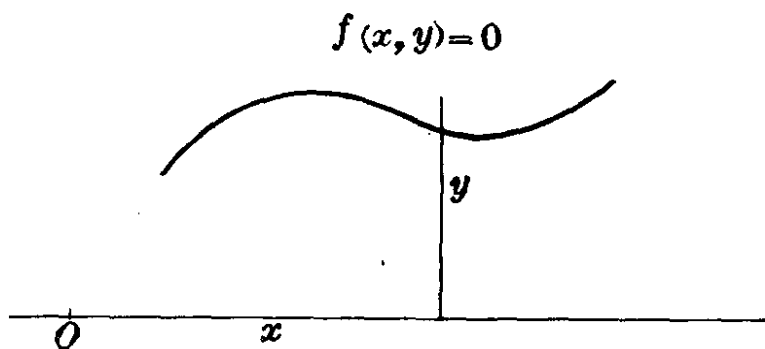


图 3-7

解析几何开辟了有待研究的新曲线的广阔领域，并促使人们发明系统地研究这些曲线的新算法，而且，只要写出一个新方程，就能引入一条新曲线。这样，解析几何既为 17 世纪的

无穷小方法提供了广阔的用武之地,又为解释这种方法提供了数学工具。这是为微积分学进行准备工作的最后的也是意义最为深远的一步。

坐标法的进一步完善和圆锥曲线的系统研究有力地推动了解析几何的传播。1655年英国数学家华利斯首先有意识地引进负的纵、横坐标,这使得解析几何所考虑的曲线范围扩展到了整个平面。他还导出了各种圆锥曲线的方程,并且从这类方程都是二次的这一特点,把圆锥曲线定义为“二次曲线”。这一结论有效地把圆锥曲线从圆锥的截线地位解脱了出来,使之成为普通的平面曲线的一种。

1691年雅各·贝努利用一个固定点以及由该点出发的射线作为基准,用平面上一点到固定点的连线的长度和这连线与基准夹角的余弦作为点的坐标,其实质也就是今天的极坐标。由于贝努利的极坐标是通过特殊曲线的应用而使人所知的,并没有一个完整的概念,因此影响不大。直到1729年德国数学家赫尔曼(Jacob Hermann, 1678~1733)明显提出极坐标概念,他用 z 、 n 、 m 三个数来表示 P 的位置,其中 z 是 p 点到极点 O 的距离, n 和 m 相当于 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$,此外他还给出了直角坐标和极坐标的变换公式。1749年欧拉根据 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 可以由 θ 同时决定,又作了改进,给出了极坐标的现代形式,同时他还引进了曲线的参数表示。

一个重要的步骤是把解析几何从平面推广到空间。1715年首先由约翰·贝努利引进了我们现在通用的三个坐标平面。随后在此基础上,帕朗(Antoine Parent, 1666~1716)、克雷洛(Clairaut, 1713~1765)、赫尔曼等人弄清了曲面能用三坐标变量的一个方程表示的概念,1731年克雷洛又研究得出一条空间曲线可以通过两个曲面方程表示,克雷洛还揭示了

这样一个事实：空间曲线的投影方程，即垂直于投影平面的柱面方程，可以通过决定这条曲线的两个曲面方程的某种组合给出。于是，像球面、柱面、抛物面、双曲面、椭球面等人们熟知的又是空间解析几何中的一些基本曲面有了用方程表示的认识基础。

1745 年欧拉在《分析引论》中给出了现代形式下的解析几何的系统叙述。欧拉的《分析引论》对一般的三个变量的二次方程：

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz = 1.$$

作了研究。他证明了经过适当的坐标变换，任一带两个变数的二次方程态可以写成下列标准形式中的一个：

- (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ 椭圆；
- (2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ 虚椭圆；
- (3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ 点（一对相交于实点的虚直线）；
- (4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ 双曲线；
- (5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 一对相交直线；
- (6) $y^2 - 2px = 0$ 抛物线；
- (7) $x^2 - a^2 = 0$ 一对平行直线；
- (8) $x^2 + a^2 = 0$ 一对虚的平行直线；
- (9) $x^2 = 0$ 一对重合的直线。

欧拉还把曲面分成六种标准形式——锥面、柱面、椭球面、单叶和双叶曲面、双曲抛物面以及抛物柱面。

解析几何最后一个重要发展是拉格朗日作出的。1788 年拉格朗日在《解析力学》中以类似后来的向量形式表示力、速

度、加速度等具有方向的量,他和笛卡儿把几何算术化一样,对向量也做了算术处理。18 世纪 80 年代美国数学家吉布斯(Josiah Willard Gibbs, 1839~1903)和希维赛德(Oliver Heaviside, 1850~1925)创立了《向量分析》(或叫向量代数),向量分析的出现立即对解析几何产生深刻的影响,现在向量代数已成了空间解析几何的重要内容。

二、微积分学

微积分的中心思想是用无穷小来解决速度问题、切线问题和求积问题。

在这一时期,先是德国天文学家、数学家开普勒把体积分成许多微小部分,建立了所谓的“无限小元素法”。他求出了近百个旋转体的体积。再是意大利几何学家卡瓦列利把开普勒的“无限小元素法”发展为纯粹的几何方法,提出了著名的“不可分原理”,即:“线是由无穷多个点组成,面是由无穷多条线组成,体是由无穷多个面组成。”同时还给出了卡瓦列利原理“两同高的立体,如果在等高处的截面积恒相等,则体积相等;如果截面积成定比,则体积之比等于截面积之比。”他用“不可分原理”确定出一些面积的比值。他的工作实际上相当于计算定积分 $\int_0^a x^n dx (n=1, 2, \dots, 9)$ 。其他一些数学家如费尔玛和罗伯瓦尔等都围绕积分学的问题做了大量工作,提出许多具有启发性的方法,使卡瓦列利的“不可分原理”趋于算术化。随着有关面积、体积、弧长及重心位置等众多问题的解决,人们逐步意识到所有可归结为求面积这类问题之间的共性。

在 17 世纪,关于求曲线切线的问题,最先发表是法国数学家笛卡儿关于切线的作法。后来他又给出另一种方法,其实

质是把切线看成割线的极限位置。费尔玛建立了求函数极值的原理,相当于给出可微函数取极值的必要条件。他利用同样的方法确定平面曲线的切线。法国数学家罗伯瓦尔和意大利数学家托里拆利同时从运动学的角度来考虑曲线的切线,把曲线视为质点的运动轨迹,把运动看成是两个简单运动的合成。他们提出“平行四边形法则”来确定质点运动瞬时速度的方向——曲线在该点的切线方向。牛顿的老师巴罗利用“微分三角形”,把切线的斜率定义为两个无穷小的比值,他已经得到了现代微分法的要领。

在微积分史上,“发现”与“认识到其重要意义”之间存在明显区别。微积分基本定理是一个典型例子。这个定理清楚地阐明了微分与积分之间的互逆关系。在17世纪早期的面积计算结果中,这个关系已经隐含在其中了。牛顿的老师巴罗就叙述和证明过一个几何定理,这个定理清楚地表明了切线问题和求积问题之间的互逆关系。然而,巴罗并没有认识到他的这个“基本定理”能为“以独特的算法为其特征的一门新科学”奠定基础。牛顿和莱布尼兹的贡献不仅在于他们认识到“微积分基本定理”这个数学事实,而且还在于他们根据这个事实从以前许许多多的无穷小方法中总结出用于系统计算的强有力的算法,正因为如此,他们才理所当然地被认为是微积分的发明者。

牛顿于1665年11月发明流数(微分)法,次年5月创立了反流数(积分)法。可惜,他当时只以手稿形式在朋友中传播自己的发现。牛顿微积分思想的发展大体上可分四个阶段:流数理论的初建,向几何不可分量观点的摇摆,成熟的流数法,最初比与最终比的提法与改进。

牛顿建立微积分学主要是从运动学的角度出发的。他在

故乡创建的微积分基本原理就与他的天体力学研究有着密切的关系,他通过对笛卡儿的《几何学》的研究,认识到了线是点连续运动的结果,运动质点的轨迹是一条曲线。牛顿在《运用无穷多项方程的分析学》中,称变量的无穷小增量为“瞬”,给出了求一个变量(关于时间的)瞬时变化率的普遍方法,并且证明了面积可以由求变化率的逆过程得到。这一事实就是我们现在称之为的“微积分基本定理”。牛顿在《流数法和无穷级数》中对流数法作了系统地阐述。他是从运动学的角度来考虑的,认为变量就是量的连续运动,因此他称变量为流量,称其变化率为流数。他阐明了流数法的基本问题是从已知流量间的关系求它们的流数间的关系,以及其逆运算。牛顿在《曲线求积法》中,放弃了无穷小量(即“瞬”)的提法,因为他对扔掉含 0 项的做法不太满意。为此他引进了最初比和最终比的概念并给出了它们的几何解释,终于把流数法建立在极限概念的基础上。

牛顿用 $s(t)$ 表示距离与时间的函数,最后得到

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)。$$

这就是质点运动到位置 A 时的速度。对于“最终比”牛顿做了精辟的描述,指出:“并非真的是两个终极量之比,而是两量之比在该两量无限地变小时所收敛的极限。这些比无限地接近于这个极限,使这个极限的差别小于任何给定的差别。”

莱布尼兹是从几何学的角度来考虑问题的。他很早就意识到,求曲线的切线的斜率依赖于纵坐标的差值与横坐标差值(当它们都变成无穷小时)之比,而求面积则依赖于在横坐

标上无穷小区间的纵坐标之和或无限窄矩形之和。并且这种求差与求和的运算是互逆的。由此可知,莱布尼兹的微分学是把微分看作变量相邻两值无限小的差,而积分则是由变量分成无穷多个微分之和。莱布尼兹在他的笔记中是这样来描述他的有关发现的:

他把曲线 $y=y(x)$ 想象为由无穷多个 y 值以及相应的 X 值组成的序列,其中相继两个 y 值之差同 y 值本身相比是无穷小量,起初他用 l 表示相邻两 y 值之差,用 omn (来自拉丁文 *omnia*) 表示求和,但很快就笔锋一转,非常轻松地说:“把 omn 写成 \int 是有益的,于是 $\int l = omn$, 即所有 l 之和”。不久他又引进了记号 dx, dy 。在 1677 年 7 月 11 日所写的手稿中,他叙述并证明了积、商微分法则:

$$d(xy) = xdy + ydx$$

$$d \frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

对于积分概念,莱布尼兹是这样阐明的:“我把一个图形(图 3-8)的面积表示为由纵坐标和横坐标之差构成的所有矩形之和,即 $B_1D_1 + B_2D_2 + B_3D_3 + \dots$, 因为窄三角形 $C_1D_1C_2, C_2D_2C_3 \dots$ 与这些矩形相比为无穷小,可以忽略不计。所以在我的微积分中,图形的面积用 $\int ydx$ 即由每个 y 同相应的 dx 构成的矩形的面积来表示。”

莱布尼兹在《对无理量也能通行无阻地求最大值、最小值与切线之新方法》一书中,给出微分定义:给定任意数 dx, dy 是使得 $\frac{dy}{dx}$ 等于切线斜率的数。他给切线所下的定义却比较粗糙:“求切线就是画一条连结曲线上距离为无穷小的两点的直线。”在这本书中,他提出了幂、积、商的微分法则,指出了极值

点与拐点的必要条件,解决了一些具体问题,包括笛卡儿未能解决的一个问题。他自豪地声称:“熟悉微积分的人能够魔术般地处理一些曾使其他高明学者感到棘手不堪的问题。”

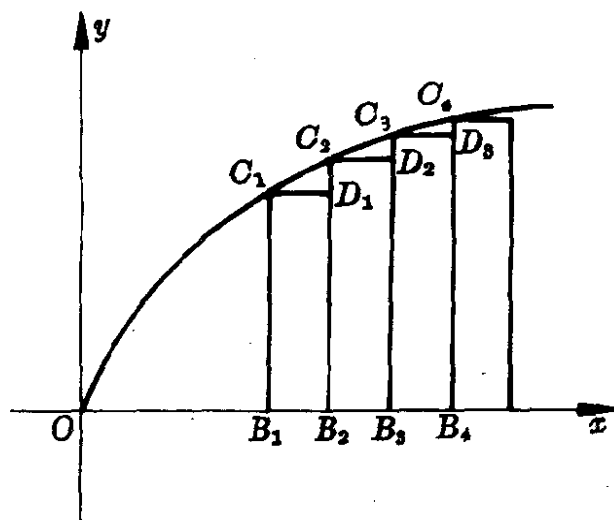


图 3-8

莱布尼兹是历史上最大的符号学家之一,他所创立的微积分符号对微积分的传播和发展产生了很大的影响,并且一直沿用至今。

现在再来看一看微积分名称的由来。牛顿称微积分为流数法(fluxions),这个名称后来逐渐被淘汰了。莱布尼兹使用“差的计算”(Calculus differentialis)与“求和运算”(Calculus summatorius)的术语。“差的计算”后来变成专门术语“微分学”(differential calculus)。莱布尼兹的朋友,瑞士数学家约翰·伯努利主张把“求和运算”改为“求整运算”,它就成为专门术语“积分学”(integral calculus)的来源。两者合起来叫做微积分学,英文里简称“calculus”。

三、概率论

概率论起源于对赌博问题的研究。16 世纪的意大利学者卡丹(Cardan Jerome)与塔塔利亚(Tartaglia Niccolo)等人已从数学角度研究过赌博问题。例如,他们计算掷两个或三个骰子时,出现总点数为 9 或 10 的可能性大小。卡丹还专门写过一本名叫《论赌博》的书。更早一点的帕西奥里(Pacioli Luca)甚至提出过“合理分配赌注问题”,并建议按两方胜局数之比进行分配。卡丹后来有根据地批评帕西奥里的方法完全没有考虑到双方机会均等的那些局数,但他也未能提供正确的解答。意大利学者的这些研究,据说除了赌博外还与当时的人口统计、保险业等有关。卡丹等人的思想并未引起重视,概率概念的要旨也不明确,很快就被人们遗忘了。

概率概念的要旨只是在帕斯卡与费尔玛的讨论中才比较明确。他们研究的问题“合理分配赌注问题”实际上是一特定场合下“数学期望”问题。

“合理分配赌注问题”用现代语言可表述如下:

甲、乙两人同掷一枚硬币,规定:正面朝上,甲得一点,若反面朝上,乙得一点,先积满 s 点者赢全部赌注。假定在甲、乙各得 $a(<s)$ 、 $b(<s)$ 点时,赌局中止了,问应该怎样分配赌注才算公平合理。

帕斯卡与费尔玛用各自不同的方法解决这个问题,帕斯卡长于计算,运用数学归纳法,推导出数学内含的规律性,而费尔玛以敏锐的观察力,严格的推理,建立起数学概念。

我们以 $s=3$, $a=2$, $b=1$ 为例来说明他们的解法。也就是:谁先得到 3 点为胜者,可以得到全部赌注,在甲得到 2 点,乙得到 1 点,赌局中止了,问应该怎样分配赌注才算公平合理。

帕斯卡分析认为:甲已得 2 点,乙只有 1 点,如果再掷一

次硬币,则或者甲大获全胜,赢得全部赌金,或者乙胜,甲与乙的点数变成相等,甲、乙平分赌金。把这两种情况平均一下,甲应得赌金的 $\frac{3}{4}$,乙则得到赌金的 $\frac{1}{4}$ 。

费尔玛认为:由甲已有 a 点,乙已积 b 点,要结束这场赌博最多还需要掷 $(s-a)+(s-b)-1$ 次,在我们这个例子中,就是最多还需要玩两局,结果为四种等可能的情况:

情 况	1	2	3	4
胜 者	甲 甲	甲 乙	乙 甲	乙 乙

在前面三种情况下,甲赢得全部赌金,仅第四种情况能使乙获得全部赌金。因此甲有权分得赌金的 $\frac{3}{4}$,而乙是赌金的 $\frac{1}{4}$ 。

帕斯卡在他的著作《论算术三角形》中给出了这一问题的通解:令 $m=s-a$ 、 $n=s-b$,则甲乙两人应得赌金之比为

$$\frac{C_{m+n-1}^0 + C_{m+n-1}^1 + \cdots + C_{m+n-1}^{n-1}}{C_{m+n-1}^0 + C_{m+n-1}^1 + \cdots + C_{m+n-1}^{m-1}}。$$

费尔玛和帕斯卡虽然在通信中没有明确定义概率的概念,但是,他们定义了使某赌徒取胜的机遇,也就是赢的情况数与所有可能情况数的比,这实际上就是概率,所以概率的发展被认为是从帕斯卡与费尔玛开始的。

费尔玛和帕斯卡研究《合理分配赌注问题》这个数学期望问题,可惜他们都没有明确地提出“数学期望”这一概念。第一个提出“数学期望”这一概念的是荷兰数学家惠更斯。他在1657年发表《论赌博中的推理》,文中提出:“在赌局开始之

前,对每一个赌徒来说就已有了一种“期望”,如果共有 N 种等可能的结果,其中, n 种结果使他获赌金为 a ,其余结果使他获赌金为 b ,则他的期望为 $\frac{na + (N-n)b}{N}$ 。

在概率论的现代表述中,概率是基本概念,数学期望则是第二级的概念,但在历史上,顺序却相反,先有“期望”概念,而古典概型的概率定义,完全可以从期望概念中导出来。

在帕斯卡与费尔玛通信讨论赌博问题的那一年,雅各·伯努利诞生了。他将概率论这门科学牢固地建立在数学的基础上,他提出了大数律:

设事件 A 的概率 $P(A) = p (0 < p < 1)$,若 η_n 表示前 n 次独立重复试验中事件 A 出现的次数,从而 η_n/n 为事件 A 出现的频率,则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $P(|\frac{\eta_n}{n} - p| \geq \epsilon) \rightarrow 0$,式中 ϵ 为任一正实数。

伯努利认为:先前人们对概率概念,多半从主观方面来解释,即说成是一种“期望”,这种期望是先验的等可能性的假设,是以古典概型为依据的。这种方法有极大的局限性,也许只在赌博中可用;在更多的场合,由于无法数清所有的可能情况,也无法确定不同情况的可能性彼此间的大小,这种方法就不可行。

他提出,为了要处理更大范围的问题,必须选择另一条道路,那就是“后验地去探知我们所无法先验地确定的东西,也就是从大量相类事例的观察结果中去探知它。”这样一来,就从主观的“期望”解释转到了客观的“频率”解释。这也就是为什么后人要称伯努利是概率论真正奠基人的原因。

第四章 现代数学

第一节 大数学家希尔伯特

1900年8月6日,第二届国际数学家代表会议在巴黎开幕。大会的第三天,年方38岁的德国数学家大卫·希尔伯特(Hilbert, 1862~1943)在会上发表了题为《数学问题》的著名讲演。讲演的第一句话就问道:“我们当中有谁不想揭开未来的帷幕,看一看在今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢?我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标?在广阔而丰富的数学思想领域,新世纪将会带来什么样的新方法和新成果?”接着,他向到会者——也向国际数学界提出了23个数学问题,这就是著名的希尔伯特演说。这一演说,成为世界数学史的重要里程碑,为20世纪的数学发展揭开了光辉的第一页。

希尔伯特认为:“每个时代都有它自己的问题。……只要一门科学分枝能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。”正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样,数学研究也需要自己的问题。正是通过这些问题的解决,研究者锻炼其钢铁意志,发现新方法和新观点,达到更为广阔和自由的境界。希尔伯特指出,历史上通过提出问题会导致整门新学科的诞生。他举了第三个典型例子。第一,贝努利(Bernoulli)的最速降落线问题是现代数学分枝——变分法的起源。第二、费尔玛(Fermat)问题,它看上

去“非常特殊,似乎不十分重要”,却大大推动了代数数论的进展,现代代数数论中核心概念“理想数”正是为了解决费尔玛问题而提出的。第三,三体问题,它对现代天体力学起了关键作用。这三个问题,既有纯粹从数学本身提出的,也有从基本自然现象提出的。

问题是科学进步的生命线。希尔伯特的这一演说得到闵可夫斯基(Minkowski, 1864~1909)的帮助。希尔伯特和闵可夫斯基经过长达八个月的思考,根据过去(特别是19世纪)数学研究的成果和发展趋势,抓住当时数学研究领域中最活跃、最关键、最有影响的课题,从中精选出23个尚未解决的问题,并预测这些问题将在新世纪数学的发展中起到重要作用。这23个问题后来被称作“希尔伯特问题”。这23个问题中,头6个问题与数学基础有关;其他17个问题涉及数论、不定积分、二次型理论、不变式理论、微分方程、变分学等领域。

应当指出,20世纪数学发展的广度和深度都远远地超出本世纪初的预料,像代数拓扑、抽象代数、泛函分析、多复变函数等许多理论学科都未列入23个问题,更不要说与应用有关的应用数学以及随计算机出现发展起来的计算数学和计算机科学了。然而,在纯粹数学领域中,希尔伯特问题一直是引导数学研究的主要源泉之一,具有不朽的历史功绩。

希尔伯特的演说获得了极大的成功。各国的数学杂志纷纷转载他的演说稿,大批数学家投入解决希尔伯特问题的激流中去。第3个问题当年就被希尔伯特的学生德恩(Dehn, 1878~1952)所解决。迄今为止,已完满解决的希尔伯特问题约占一半,有几个问题比较笼统,难以判定解决与否,大约还有三分之一的问题仍悬而未决,有的有了部分进展,有的则差得很远。1975年,在美国的伊利诺斯大学召开了一次国际数

学会议,邀请世界著名数学家参加,专门研究希尔伯特问题的进展。会后出版的论文集详细地介绍了各个问题的进展。(见《Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems》一书)近一个世纪来,人们把解决希尔伯特问题,哪怕是其中一部分,都看成至高无上的荣誉。据统计,从1936~1974年,被誉为数学界诺贝尔奖的菲尔兹(Fields)国际数学奖的20名获奖人中,至少有12人的工作与希尔伯特问题有关。1976年,美国数学会组织评论1940年以来的美国十大数学成就,就有3项是希尔伯特问题的(1)、(5)、(10)等3个问题的解决。值得高兴的是,中国数学家在第8和第16问题(含哥德巴赫猜想和极限环研究)上曾经作出一些贡献。重要的问题历来是推动科学前进的杠杆之一,但一位科学家如此自觉,如此集中地提出一整批问题,并且如此持久地影响一门学科的发展,在科学史上确是罕见的。

大数学家韦尔(H. Weyl)在希尔伯特去世时的悼词中曾说:“希尔伯特就像穿杂色衣服的风笛手,他那甜蜜的笛声诱惑了如此众多的老鼠,跟着他跳进了数学的深河。”对有志的人们来说,这希尔伯特问题正是这样一种甜蜜的笛声,我们至今似乎仍能听到它的召唤。

希尔伯特(David Hilbert)是20世纪最伟大的数学家。1862年1月23日生于德国的哥尼斯堡。他在家乡上大学并在那里攀上学术界的前几级阶梯,成为大学讲师,后来在适当的时候升为副教授。1895年在菲利克斯·克莱因(Felix Klein)提议下,他被授予哥廷根大学的正教授,一直到去世(1943年2月14日)。

在当时最引人瞩目的几个数学领域里,希尔伯特都作出了卓越的贡献。希尔伯特工作方式可以说,一个时期就专心致

志一个方向,过了一个时期又专心致志于另一个方向。就历史上来说,他一生先后工作的时期大概分为五个时期:第一阶段搞的是“不变量理论”;第二阶段从事“代数数论”研究;第三阶段完成“几何基础”。第四阶段研究“积分方程和物理学的公理化”;第五阶段研究“数学基础”、“数理逻辑”。

在《几何基础》中,希尔伯特阐明了近代公理法的基本思想,提出了欧氏几何学的一套严格而简单的公理系统,并且讨论了这个公理体系的相容性、独立性、完备性等问题。近代公理法的基本思想是:先提出几个不予定义的基本概念和若干不加证明的公理,这些基本概念的性质就是由这些公理来描述和保证。从这些基本概念和公理出发,通过形式逻辑的推理,推演出全部结论。这不仅大大丰富了几何学的内容,而且对于近代数学基础的研究,甚至对整个科学的进展都起了重要作用。他提出的形式主义数学纲领,最后虽然没有成功,但在数学哲学上的意义,仍然是十分巨大的。

希尔伯特不仅属于德国,而且属于全世界。由于他和 F·克莱因的努力,使哥廷根在 20 世纪初的 30 年间成为数学研究与教育的国际中心。

第二节 爱因斯坦的相对论和四维空间

1915 年,爱因斯坦完成了广义相对论。根据广义相对论推知,质量巨大的太阳,使它周围的时空发生了弯曲。为此当光线通过太阳周围时空应发生偏转,经理论计算其偏转角应等于 $1.75''$ 。广义相对论的这个预言,引起了人们极大的兴趣,也是对广义相对论的严峻的考验。可是要实际观察这一效应是十分困难的,其原因是遥远的恒星在天球上有确定的位置,

它发出的光经过太阳周围时,正是我们的白天,背景太亮,所以看不见星体。因此,必须在日全食时测量日冕附近的星体在天球上的位置,并与晚上测量到的该星体的位置进行比较。1919年5月29日,英国皇家学会和皇家天文学会派遣英国最著名的天文学家艾丁顿、柯庭汉(Cottingham)、克罗姆林(Crommelin)、戴维逊(Davidson)组成两支远征观察队。一支到达巴西的索布拉尔(Sobral),另一支到达西非的比林西卑岛(Principe)。那天,观察队进行了日食观察,观察到光线偏转的平均值为 $1.98''$ 。这个观察结果与理论计算是很相符合的。该观察证实了广义相对论的预言,全世界为之轰动。爱因斯坦(Albert. Einstein, 1879. 3. 14~1955. 4. 18)是德国物理学家、数学家。生于德国乌尔姆(Urm)市一个犹太家庭。爱因斯坦在物理学史的地位怎样评价都过份。杨振宁说:“他是我们这个时代最伟大的物理学家;与牛顿一道,是历史上两位最伟大的物理学家。”而郎之万则认为:“他也许比牛顿更伟大一些,因为他对于科学的贡献更深入到人类思想基本概念的结构中。”

爱因斯坦出生不久,全家就迁往慕尼黑,爱因斯坦在那里接受了小学和中学教育。据说,他幼年时智力发展迟缓,爱因斯坦很晚才学会说话,以致他的父母认为他可能是智力迟钝的人。在小学阶段成绩不算突出,他喜欢理解和思考,不愿意背诵,所以需要死记硬背的文史科目成绩平平,唯独数学是他偏爱的科目,成绩优异。中学时代爱因斯坦最为与众不同之处,是他在学习上热衷于自学,并在这方面表现出非凡的能力。

1895年,爱因斯坦15岁。他只身到瑞士苏黎士投考联邦工业大学。具有讽刺意义的是,爱因斯坦是从失败开始他的生

涯的。他参加苏黎士联邦工大的入学考试,结果靠他优异的数学成绩而获得通过。他在其它学科的成绩不够好,这迫使他像笨学生那样回到中学补课。当然,他通过了第二年的考试,而且一直读完了大学。在大学里,爱因斯坦用一种奇特的方法进行学习,他只去听那些他感兴趣的科目,“涮掉”他所不喜欢的课程;而把大部分时间用来自学当时一些理论物理大师们的著作。然而这种学习方式无法应付考试,幸亏他的同班好友格拉斯曼(Grassmann)借给他听课笔记,帮助他渡过难关。老师们自然都不喜欢这么一个自由散漫的学生,他的老师、著名的数学家闵可夫斯基后来得知爱因斯坦创立了狭义相对论时对别人说:“这使我大吃一惊,因为爱因斯坦在学生时代是条“懒狗”,他一点也不为数学操心。”其实爱因斯坦是一个勤奋的学生,只是表现方式与其他学生不同。从近年才发现的爱因斯坦在1898~1902年间写给他未婚妻玛丽琦(Maritty)的42封信中我们得知,在大学期间,他除了自学之外,还曾付出了艰巨的劳动,研究当时热门的以太理论,研究虽然没有结果,但无疑为他几年后创立狭义相对论奠定了基础。

1900年爱因斯坦从联邦工大毕业,同班4人,3人留下当助教,只有他由于教授们的反对未能留校,他们没有一个人愿意为他提供一个助教的职位,即使他们需要这样一个助手——这是未来最杰出的物理学家的母校的一种奇怪态度!

爱因斯坦是毕业后到一所中学任教师,在那里,由于他对物理学的非正统看法使得他不受学校行政当局的欢迎,他找到教师的职位后又几乎马上失去。最后,他在一位朋友的建议下到瑞士专利局工作,责任是判定新发明价值。这个工作对爱因斯坦来说是很好的,因为它允许他使用他的物理学的洞察力,而且也给他留下用于研究理论物理学的时间。

1905年,年仅26岁的爱因斯坦在这一年德国的《物理杂志》上连续发表了三篇后来公认都应获得诺贝尔奖的论文,内容分别为布朗运动理论、光量子理论和狭义相对论。第一篇为分子的存在提供了强有力的证据,三年后他的理论为实验所证实,使原子论取得了决定性的胜利。后两篇更重要,它们引发了物理学的一项深刻的革命,并被认为是现代物理学的两大支柱——量子论和相对论的奠基性文献。这一年,他还以一篇关于测定分子大小的论文,获得苏黎士大学的博士学位。

随着狭义相对论的意义逐渐为物理界所认识,爱因斯坦名声鹊起。1909年他离开专利局应聘担任苏黎士大学理论物理学副教授,后来又相继担任希拉格德国大学和他的母校瑞士联邦工大的理论物理学教授。1913年,爱因斯坦担任柏林威廉皇帝物理研究所所长兼柏林大学教授,此后他在德国工作了18年。从20年代初开始,由于爱因斯坦的犹太血统以及他的和平主义的政治态度,不断遭到德国法西斯势力的迫害。1933年,希特勒通过政变上台,正在美国访问的爱因斯坦发表《不回德国的声明》以示抗议。同年10月,他应聘担任美国普林斯顿高级研究院教授,以后他一直在这里继续他的研究工作直到1955年4月18日逝世。

爱因斯坦在《狭义与广义相对论浅说》中指出:空间是一个三维连续区。这句话的意思是,我们可以用三个数(坐标) x 、 y 、 z 来描述一个(静止的)点的位置,并且在该点的邻近处可以有无限多个点,这些点的位置可以用诸如 x_1, y_1, z_1 的坐标来描述,这些坐标的值与第一个点的坐标 x, y, z 的相应的值要多么近就可以多么近。由于后一个性质所以我们说这一整个区域是个“连续区”,由于有三个坐标,所以我们说它是“三维”的。

与此相似,闵可夫斯基简称物理现象的世界,为“世界”的就空时而言,自然就是四维的。因为物理现象的世界是由各个事件组成的,而每一个事件又是由四个数来描述的,这四个数就是三个空间坐标 x, y, z 和一个时间坐标——时间量值 t 。具有这个意义的“世界”也是一个连续区,由于有四个坐标,所以,我们居住的世界是一个四维空时连续区这句话却是再平凡不过的说法。

1905年,爱因斯坦创立狭义相对论。两年之后,1907年,爱因斯坦在为一家德国杂志撰写一篇关于狭义相对论进展情况的综述文章时,发现狭义相对论应用于物理学的其他领域都很成功,唯独不能应用于万有引力问题。为了解决这个矛盾,爱因斯坦转入广义相对论的研究,并很快确立了“广义相对性原理”和“等效原理”,但数学上碰到的困难使他多年徘徊进展不大。那么新的理论从哪里着手?它需要什么数学工具?这一切仍然还不清楚。为了找到新的突破口,爱因斯坦苦苦思索了四年。大约在1911年前后,爱因斯坦终于发现了引力场和空间的几何性质有关。爱因斯坦还发现新的引力理论应该用的数学工具是非欧几何。1912年,他请大学的同学,已在联邦工大任数学教授的格拉斯曼帮忙,后者查阅了文献,发现了他所要寻找的数学工具就是黎曼几何和张量分析。他们两人合作于1913年发表了广义相对论的第一篇论文,但是未能找到正确的场方程。经过两年的继续努力,爱因斯坦终于在1915年用黎曼几何的框架,以及张量分析的语言最终完成了广义相对论。这两项数学工具,早在几十年前已由数学家准备好——然而数学家当时并不知道这样的理论能有什么用,抽象数学与物理现实间的惊人一致,是科学历史上一种常见的现象,例如华人科学家杨振宁的规范场论也和陈省身在十几

年前创立的纤维丛数学理论之间有内在的深刻联系,而陈省身事先并不知道任何物理事实。

第三节 女数学家 E·诺特

埃米·诺特(Emmy Noether 1882~1935)是历史上最伟大的女数学家。70年代来,数学界出现了一股“诺特热”。70年代出版了她的传记,纽约州立大学(Buffalo)设立了以诺特命名的研究席位。“Noetherian”这个形容词出现在代数学论文的标题中。迄今为止,还没有一位女数学家受到人们如此的崇敬。诺特的名字,已成为亿万妇女献身科学的象征!

E·诺特 1882 年出生在德国爱尔朗根一个以喜好钻研学问著称的犹太人家庭。父亲马克斯·诺特(Max Noether)是爱尔朗根大学有名的数学教授。著名的“不变式之王”戈丹(Gordan)教授是她父亲的密友,常来她家作客。在他们的影响下,E·诺特对数学充满了热情。

诺特小时候眼睛就高度近视,长相平常,像一切女孩子一样,学过钢琴和舞蹈。1900 年冬,她考入了爱尔朗根大学,学过历史、罗曼斯语言(Romance)。1903 年冬,诺特到了哥廷根大学,听了闵可夫斯基、布鲁门萨尔(Blumenthal)、克莱因和希尔伯特等人的讲课。但当时只能旁听,爱尔朗根和哥廷根大学都不准女生在校注册。诺特生活在公开歧视妇女从事科学、发挥数学才能的制度下,她通往成功的道路,比别人更加艰难曲折。

1904 年,爱尔朗根大学允许女生以男生方式参加考试,于是诺特又重回爱尔朗根大学学习数学,1907 年 12 月通过博士考试。她的导师就是戈丹教授,论文题目是《三元双二次

型不变量的完全系》。后来,诺特的数学研究尽管离开了这一方向,但对她的导师一直怀着深深的敬意,她的书房里一直挂着戈丹的画像。

1916年,诺特离开爱尔朗根来到哥廷根,她应大数学家希尔伯特的邀请,用希尔伯特的名义讲授代数不变量,目的是用于解决希尔伯特和克莱因正在思考的一些问题。诺特的才能很受希尔伯特的器重,就向校方申请给诺特以“私人讲师”的身份在哥廷根讲课,然而对妇女的传统偏见,诺特竟连这样的资格也无法取得。哥廷根哲学教授会议(当时数学划进哲学范围)中的语言学家和历史学家反对希尔伯特为诺特所作的努力,诺特只能以希尔伯特的名义代课。有一次,希尔伯特公开在评议会上气愤地说:“我无法想象候选人的性别竟成了反对她升任讲师的理由。别忘了,我们这里是大学而不是浴室。”拖了三年,直到1919年,才准许诺特升任讲师。诺特在哥廷根大学的就职论文中,讨论了连续群(李群) F 不变式问题,给出诺特定理,该定理把对称性、不变性和物理的守恒性联系在一起。

1922年,诺特以自己的数学才能赢得了声誉,也由于大数学家希尔伯特、韦尔等人的推荐,她终于在清一色的男子世界——哥廷根大学中取得了教授称号,然后只是“并非雇员的编外教授”。这种头衔不同于通常的教授,不算国家和学校正式聘请的教学人员,没有正式工资。只是因为她教代数课,才从学费中支付给她一小笔薪金。当代的数学史家常常评论说:“今天的女数学家们的境况比诺特那时候要好多了,她教书是没有工资的……。”

1919~1920年间,诺特开始走上她的完全独立的数学道路。1921年,她的经典性论文《Idealtheorie in Ringbereiche

(环中的理想论)》标志着抽象代数现代化的开端。如果说,当今数学是在代数的庇护下进行的,那末这只在诺特的工作之后才成为可能。她教会我们用最简单、最经济、最一般的概念和术语去进行思考:如同态、理想、算子环等等。这是一项非常了不起的教学创造,它标志着抽象代数学真正成为一门数学分支。诺特也因此获得了极大的声誉,被誉为是“现代数学代数化的伟大先行者”、“抽象代数之母”。

诺特一生都没有结婚,但她却将慈母一样的爱,倾注到向她学习数学的年轻人身上。在诺特周围,成长起一批优秀的代数学家。其中有荷兰的范德瓦尔登(Van der Waerden)、法国的厄布朗、日本的正田建次郎,我国的曾炯之教授等等。1924~1925年间,荷兰的阿姆斯特丹大学来的范德瓦尔登成了诺特的学生,当时他只有22岁,是欧洲最年轻的数学天才之一。范德瓦尔登很快掌握了诺特的思想,并加以精辟透彻的解释,在哥廷根极其成功地讲授了“一般理想论”的课程。后来范德瓦尔登写了《代数学》一书,总结了整个诺特学派以及其他代数学家的成果,终于风靡世界,征服了公众的心。在1932年苏黎士举行的国际数学家会议上,诺特的科学声誉达到了顶点。

可是,苏黎士会议以后仅仅几个星期,德国的文明、哥廷根的成就遭到了空前的浩劫。希特勒法西斯上台了。1933年4月26日,地方报纸上刊登了一项通告:按照新的国家法律,6个犹太哥廷根教授必须离开学校。6人中有4个是理科的,其中之一就是诺特。经过韦尔的介绍,1933年10月,诺特到美国布林马尔学院任教。那里离普林斯顿高等研究所很近,1934年,诺特每周去研究所讲一次课。当时听她课的奎因(Quinn)教授回忆说,诺特身材不高,体形略显粗胖,肤色黝黑,剪得短短的黑发夹着几丝灰发。她戴着一副厚厚的度数很

高的近视眼镜,用不甚连贯的英语讲课。她喜爱散步,常带着学生外出远足,途中往往全神贯注地谈论数学,全然不顾来往行人车辆,以致学生们不得不保护她的安全。

1935年4月14日,迄今为止最伟大的女数学家诺特不幸死于外科手术,享年53岁。韦尔在追悼会上致悼词。韦尔在悼词中指出:“E·诺特是一位伟大的数学家,而且我坚信,也是历史曾经产生过的最伟大的女性之一。”大物理学家爱因斯坦在《纽约时报》发表悼念文章。爱因斯坦高度评价诺特的工作,称赞她是“自妇女接受高等教育以来最杰出的富有创造性的数学天才”。爱因斯坦指出,凭借诺特所发现的方法,“纯粹数学成了逻辑思想的诗篇”。1935年9月,苏联数学家亚历山大罗夫在莫斯科数学会发表演说,纪念诺特的数学成就,回忆诺特对社会主义苏联的友谊。

诺特是一位卓越的学者。她那么敦厚,却又那样思路敏捷,使人们难以忘怀。20世纪的人们,特别是妇女一直在怀念她。迄今为止,女数学家的成就似乎还没有人能超过诺特。当然,现在公共歧视妇女发挥数学才能的制度已不复存在,有迹象表明,女数学博士的人数在增加。本世纪30年代以来的40年中,美国数学博士只有7%是女性。1969~1972年间,这一数字为7.3%。1972~1975年再上升为9.1%,而在1974~1975年度中1022个数学博士中有103个女性,比例刚刚超过10%。1975年,美国国家科学院第一次有一名妇女进入,她的名字叫罗宾逊(Julia Robinson),她在解决希尔伯特第10问题过程中作出了关键性的贡献。1976年,在《美国数学月刊》上登过一篇《数学与性别》的文章,探讨为什么女数学家很少的原因,结论是:一、在中小學生中男女學生对数学的喜爱程度是一样的。二、教师和家长的態度是不鼓励女孩子学数学

的。三、数学仍然是排挤妇女的筛子。四、在长期聘用的大学数学教授中,妇女只占 1.6%(8:490)。

由此可见,妇女通往数学的道路仍然是艰难曲折的。诺特在数学上的光辉成就,今后仍然是鼓舞妇女向数学高峰挺进的力量源泉。

第四节 二次大战中数学家的贡献、 控制论(火炮自动跟踪)、运筹学、密码破译

20 世纪发生的第二次世界大战,是人类文明的大浩劫。成千上万的人死于战祸,其中包括数学家。波兰学派将近二分之一的成员夭折,德国的哥廷根学派摧残殆尽。不要说像巴拿赫这样的名家受迫害早逝,就是泰希缪勒(Teichmüller, 1913~1943)——一个对希特勒愚忠的青年学生,拟似共形映照的奠基人——死于战场,都令人不胜惋惜。可是,数学家在战争中不是没有作为的。大批的有正义感的数学家投入反法西斯战争的洪流。这里列举几个例子。

一、控制论(火炮自动跟踪)

控制论的创始人是美国数学家维纳。维纳的父亲是一个俄籍犹太人,当年踏上美国海岸时口袋里只剩 50 美分,但凭个人努力后来成为一位斯拉夫语教授。1894 年 11 月 16 日,维纳诞生在密苏里州的哥伦比亚。他从小是一个神童,8 岁读解析几何,11 岁读大学。先念数学,又读哲学、语言,后来又喜欢生物学。14 岁到哈佛大学学习动物学。父亲硬叫他读哲学。18 岁就在哈佛大学得到数理逻辑博士学位。这些经历都是真实的。维纳自己写过题为《昔日神童》的自传,详细追述了这一

切。

第二次世界大战之时,德寇空军危及英伦三岛,入侵飞机的速度超出了用人的目力控制高射炮所能反应的限度。维纳参加了反法西斯战争的工作,投入了火炮自动跟踪的研究,这对他创立控制论具有决定性意义。他研究了随机过程的预测,滤波理论在自动火炮上的运用,为控制论提供了数学方法。更重要的是他把火炮自动打飞机的动作过程与人狩猎的行为过程进行类比,从中发现了重要的反馈概念。由雷达控制的自动火炮系统,它的控制过程与猎手在狩猎时行为非常类似。当雷达对目标进行搜索跟踪,在自动跟踪过程中,把雷达天线的电轴方向与目标物的方向加以比较,并以跟踪误差大小,控制转动天线拖动装置的程度,目标物的坐标信号从雷达进入高射炮控制仪,控制仪解决炮弹和目标物的相遇问题,并把预测坐标送给高射炮以进行射击。

维纳认识到要从整体观点出发,有必要把各门学科联系起来探讨贯穿于其中的共同规律。于是,维纳求助于墨西哥心脏研究所的罗森勃吕特(Rosenblueth),努力将神经生理学、电工学、数学、逻辑学紧密地结合在一起。他们结合的方法是多种多样的。比如围着圆桌吃饭,谈话毫无拘束,不许任何人摆架子。饭后请一位客人宣读一篇论文提要,然后接受一通尖锐批评。有些下次不来了,但是会议常客却深切感到科学的进展。又比如,在一起工作一段时间,各种专家围攻一个共同的问题。维纳的《控制论》是在墨西哥国立心脏研究所写成的。“到科学地图上的空白地区去作适当的查勘工作,只能由一群科学家来担任。他们不像一群下属围绕一个司令官,而是由于那种要想理解整个区域和互相取长补短的愿望。”这是维纳对当时科学工作的回忆。

下面是一份参加《控制论》科研计划的人员不完全名单：

工程师	比格劳
电工学家	李郁荣
生理学家	罗森勃吕特, 麦卡洛克(McCulloch)
数理逻辑学家	皮茨(Pitts)
计算机设计家	埃克特(世界第一架电子数字计算机设计者之一)
	布什(Bush)(世界第一台模拟计算机的设计者之一)
心理学家	克留费(Klüfer)
数学家	冯·诺伊曼, 维纳
经济学家	摩根斯顿

1943年,其中的一些人在普林斯顿高等研究院开过一次会,1945年在墨西哥数学会上又碰头过一次。1946年春天,在纽约召开了讨论反馈问题的一系列会议。1947年春,维纳到英国和图灵讨论了控制论的思想。到1947年10月,维纳的划时代著作《控制论》定稿。威利(Wiley)书店于1948年出版。维纳发展的控制论,主要用时间序列观点处理信息的转换、提取、加工和预测。它依赖于系统的传递函数和频率特性,使用的数学工具主要是数理统计和调和分析,这套方法,现在称之为“经典的控制理论”。

二、运筹学

有军事用途的另一种数学现在称为运筹学(Operations Research)。它主要用于提高现存设备和人员的使用效率。在二战中,英国海军的运筹学小组,在搜寻德国潜艇方面制定了有效的战术策略,投掷深水炸弹的计划得到精心的安排。美军

在新兵分配方面,采用了充分利用人才的最优方案。新几内亚海域上搜寻并炸沉日本舰只的一次实战,运用战略决策的数学理论。在有限的人力、物力的情况下,提高设备利用率方案不断产生,它成为战后运筹学重大进展的先声。

运筹学最突出领域是线性规划,这一名称出现在战后的1946年,但它是美国空军有计划行动的自然继续。由于从平时转入战争状态,必须在减少人员、材料和生产能力的条件下保持经济能力,办法是提高人员的素养和充分利用,战斗队形的合理展开,供应和后勤的及时提供,设备的完整配套等。这里时间是一个决定的因素,美国空军在战时已用线性规划方法对这些问题作了探讨并投入使用。

1946年,但泽(Dantzig, 1914~)在获博士学位后,仍回到美国空军管理部。他发现许多提高设备利用率的方法在战时已经有了,只要用线性不等式代替线性方程就能把这些方法简化成简单的数学模型,1947年,但泽提出了完整的数学论证,并发展为一门具有广泛应用的新学科——线性规划论。将线性规划用于经济领域的是经济学家库普曼(T. C. Koopmans, 1910~),事实上,他在战争年代曾用类似的想法处理过运输问题。他认识到但泽工作的重要性,并用之于广泛的领域。

从数学上说,但泽并非首创。早在1820年,傅立叶就有过类似的想法。而苏联的康托洛维奇也在1938年发表《组织和计划生产的数学方法》一书,并在苏联经济和卫国战争中获得应用,这套方法的本质也是线性规划。康托洛维奇的工作一直局限于苏联,直到1950年库普曼注意到并翻译过来才为西方所知。库普曼和康托洛维奇后来都因此获得了诺贝尔经济学奖。

自本世纪 40 年代以来,运筹学发展迅速。它的主要分支有规划论、对策论、排队论及质量控制等。

三、密码破译

在第二次世界大战期间,美国聘请出色的数学家担任密码分析人员,这批专家创造了世界闻名的密码史上的精彩一页。在 1943 年 4 月,美国密码学家破译了关于日本联合舰队长官山本五十六准备视察前线基地的电报。在电文中,日本方面列出了山本五十六活动的详细日程表。根据电文,在 1943 年 4 月 18 日这天,美国派出的飞行员在完全预定的时间和地点对山本座机截击成功。事实上,美国的密码分析人员在 1940 年就破译了日本的高级加密密码机,此机美国人称为“紫密”,日本人称为“九七式欧文印字机”。“紫密”使用的是相当复杂的多表代替类型密码。这是一次高水平的破译,高等数学中的群论、同余式理论和泊松分布等在这场战斗中发挥了作用。然后,对于美国的破译,日本方面在很长时间内一无所知。1942 年日本突袭中途岛海战的失败,其中一个重要原因也是由于美国破译了日本人攻击中途岛的战术、作战日期和作战时间的密码。在第二次世界大战结束后,一位深知战时密码破译价值的美国官员说,密码破译使第二次世界大战缩短了一年。此说虽有些夸张,但重要情报的破译确实影响了战争的进程。

本世纪 40 年代末,美国数学家香农(Shannon, 1916~)创立了一个著名的新理论——信息论或称为通信的数学理论。它第一次从理论上透彻地阐明了密码分析的可能性。香农的信息论将密码编码学和密码分析学都置于坚实的数学基础上。本世纪 60 年代末微电子学的发展,使得理论上有效的、

比较复杂的加密算法可以通过电子设备实现,而计算机的使用使得密码分析者大有可为。

香农就读于密执安大学,1940年在麻省理工学院获得数学博士学位。以后他立即投身到应用数学的研究中去。1940年夏,他在普林斯顿的国家研究协会工作,开始考虑通信工程的信息量问题。战后,他来到贝尔实验室,接触到为国防要求而研制的军事通信系统 AN/TRC-6。众多的通信实际工作经历使他洞悉通信工程中数学问题的背景、意义和提法。1948年,香农在贝尔系统技术杂志上发表《通信的数学理论》的论文,为信息论的创立奠定了基础。1972年,香农获得哈维(Harvey)奖。

总之,一切有正义感的数学家,为反法西斯战争的胜利,作出了巨大的贡献。

第五节 计算机引起数学革命

1946年2月15日,在美国宾夕法尼亚大学,世界上第一台电子计算机 ENIAC 正式投入了运用。尽管这台计算机现在看起来是那样“笨拙”和“低级”,可在当时却轰动了世界,它的意义在于宣告人类开始了一个新的时代——信息革命的时代。

50年来,电子计算机的发展是那样的目不暇接,那样的绚丽多彩,就机器本身来说,电子计算机已经更新到第四代。

第一代:电子管计算机。时间:1946~1957年。

第二代:晶体管计算机。时间:1958~1964年。

第三代:集成电路计算机。时间:1964~1972年。

第四代:大规模集成电路计算机。时间:1972年~

第五代：新一代计算机。

在电子计算机发展史上，美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼(von Neumann, 1903~1957)作出了杰出的贡献，人称“电子计算机之父”。

冯·诺伊曼早期对数学的贡献集中在纯粹数学方面。他曾称雄“算子环”领域达 20 年之久，一直是这个领域内无可争辩的世界权威。1940 年起，冯·诺伊曼积极投身于反法西斯战争的洪流。开始了由纯粹数学家到杰出应用数学家的转变过程。

1944 年夏天，冯·诺伊曼在一个火车站候车时，偶然遇到了 ENIAC 研制小组的负责人之一，数学家戈德斯坦中尉。当时，冯·诺伊曼正为原子弹实验中遇到的大量计算问题而苦恼，上百名计算员用台式计算机日夜不停地工作，仍然不能按时完成任务。在与戈德斯坦中尉闲聊中，冯·诺伊曼听到了 ENIAC 正在研制的消息，立刻理解了这项工作的深远意义。不久，他就成了研制小组的常客，并对一些关键问题的解决作出了贡献。1945 年 3 月，他起草一份“离散变数自动电子计算机”的设计报告，对 ENIAC 作了两项重大的改进。这份设计报告是计算机结构思想一次最重要的改革，标志着电子计算机时代的真正开始。

电子计算机是本世纪最伟大的技术成就。这个成就使人类面临着一场新的科学技术与工业的革命。就其意义而论，这个革命远远超出以蒸汽和电为标志的工业革命。计算机最初的发展是与数学密切联系的，直到现在，计算机与数学还存在着特定的关系，有人说“计算机是数学的创造物，又是数学的创造者”，“计算机是新的数学范式，有其特用的语言”，“计算机是讲数学语言的生物”，“计算机是具体化了的数学”。总之，

两者密切相关,互相促进,从而使双方都取得了很大进展。1985年,曾在法国的斯特拉斯堡专门召开国际讨论会,研究计算机信息科学对数学与数学教育的影响。

计算机的发展引起数学革命主要表现在:

1. 计算机对应用数学的影响(天气预报、人造卫星)

计算机产生之前,许多科学技术问题在表述成数字形式之后,往往由于无法求出数值解,或者无法及时求出数值解,而只能束之高阁,或流于泛泛而谈的地方。计算机的出现,改观了这种局面,应用数学有了长足的进步。计算机快速、准确的计算能力为自然科学、社会科学的定量研究和用科学理论定量地指导实践打开了新的局面,使得近似计算方法作为一种科学方法开始发展起来了,从而为科学的发展开辟了新的方向。下面列举二个例子。

天气预报

天气预报在今天已司空见惯,但天气预报成为一门精确的科学却是在计算机成为可能后才实现的。事实上,早在18、19世纪,流体力学、气象学的知识在理论上已经相当完备,预测天气的微分方程组在那时就已经几乎完全建立了。例如,数值天气预报是一种用方程式(数值模式)分析地球上大气移动的方法。它把某一时刻的气温、湿度、气压、风速、风向等数据(初始值)代入方程式,就可以得出三分钟后的变化数字。按此方法反复计算,就可以推知一天、两天后的气象数据。由此可见,天气预报微分方程组中涉及的参数多,测得的各种数据十分复杂,因此利用手算或简单的计算器械,预测24小时内天气的运算量往往需要几天甚至几十天才能完成,等到方程求解出来了,预报早就没有意义了。而电子计算机特别是巨型电子计算机的出现,则使得这一过程在几分钟之内就可以完成,天

气预报才真正成为可能。

人造卫星

现在,我们来看看人造卫星、宇宙飞船等涉及的三体问题。三体问题是 n 体问题的一个特例,所谓 n 体问题,就是研究几个物体的相互吸引问题。自从牛顿发现了万有引力定律,牛顿运动第二定律之后,通过六个二阶方程的常微分方程组,牛顿本人和17、18世纪的数学家、物理学家就解决了二体问题,如太阳、地球的运动问题,获得了精确的解析解。于是,人们开始研究一般的 n 体问题,当然主要是三体问题。人们发现,研究 n 体问题其原理都是一样的,即只用到简单的牛顿万有引力定律和第二运动定律,就可列出 $3n$ 个二阶微分方程。但是,人们不久就认识到, n 体问题,甚至哪怕是较简单的三体问题,不能用解析方式求出其解。寻找三体问题的近似解在18、19世纪曾取得了一些进展,但那时解决这个问题并不具有太大的现实意义,因而人们对其近似解过程中的巨大的、超越常人的工作量似乎不大关注。

但是,进入20世纪后,航天科学的发展使得这个问题变得异乎寻常的重要。原来,人造地球卫星、宇宙飞船轨道的选取与求解三体问题的原理是一样的,因为这是由地球、月亮和人造地球卫星(或宇宙飞船)构成的三体问题。正是由于计算机的出现,运用了电子计算机,进行快速、准确的数值近似计算,才使得苏联、美国相继在50年代末成功地对人造卫星所涉及的三体问题进行了计算(当然还要航天材料以及技术的进步),终于发射了人造地球卫星。

2. 计算机对纯数学的影响(四色问题)

计算机除了能够快速运算之外,还能够进行逻辑判断。电子计算机逻辑判断这一特征最引人注目的是在解决“四色问

题”中所起的作用。四色猜想的问题,就是向小学生也讲得清楚。1852年,刚从伦敦大学毕业不久的格里斯(Francis Guthrie, 1831~1899)写了一封信给他的兄弟弗雷德里克·格里斯(Frederick Guthrie),说:“看来,每幅地图都可以只用四种颜色着色,使得有共同边界的国家着上不同的颜色。”这就是四色猜想的原始叙述。1852年10月23日,他的弟弟就这个问题的证明向老师、数学家德·摩根(De Morgan)请教,德·摩根当天就写了一封信给哈密顿(W. R. Hamilton),这两位数学家实际上都没有能够证明这个看上去非常简单的问题。于是四色问题进入了数学家的圈子。一百多年来,许多人都宣称他们证明了四色猜想,但后来都发现证明有错误。越来越多的数学家对此绞尽脑汁而一无所获,于是人们开始认识到,这个貌似容易的题目,其实是一个可以与费尔玛大定理比美的难题。

1976年,美国伊利诺斯大学的黑肯(W. Haken)、阿佩尔(K. Appel)郑重宣布,他们证明“只要四种颜色就够了。”他们借助的工具就是计算机。通过设计得十分巧妙的程序,用计算机进行复杂的证明。他们在伊利诺斯大学的IBM360机对所设计的1482种情况,花费了1200多小时机器时间,终于证明了四色定理:四种颜色就可以使地图上相邻地域相互区别开来。

这个消息不胫而走。人们历来只知道电子计算机能够计算,至于证明定理则整个的理论还十分幼稚。然后这次却对于四色问题这种超级难题进行了证明,真是闻所未闻。反应也是多种多样的。其中持怀疑或保留态度的大有人在。还有一些数学家却从哲学上提出了不少的新问题。

电子计算机越来越深入地介入数学本身的各个领域。近

年来,关于一个大数素数性的检验,关于一个有限单群的构造性证明,多数要依赖大型计算机。看来,使用计算机于数学证明是一股还会增大的潮流。

电子计算机的兴起使得与计算机的设计、理论及其相关哲学、社会问题有关的学科得到了极大的发展,从1946年(当然有些可以上溯得更早)至今就形成了几乎是一门独立的计算机科学。

图灵机

英国数学家图灵(Turing, 1912~1954)彻底分析“计算”的本质,提出这样的看法:任何计算都可以看作是由一个抽象的计算机来做的。它使用长条带子上成串的0和1,执行下列各种指令:①写符号0;②写符号1;③向左移一格;④向右移一格;⑤观察现在扫描的符号并相应选择下一个步骤;⑥停止。将这种想法详细地给出数学上的定义,就是图灵计算机——简称为图灵机。图灵成功地把人的计算活动机械化了。图灵机是现代计算机的原型。

图灵于1912年6月23日生于伦敦一个中上层的家庭里。他是一个早慧而有独立见解的少年。1931年进剑桥大学后,他的多方面才能迅速爆发出来。1935年就以《关于高斯误差函数》的论文获博士学位,同年荣获史密思(Smith)奖。1936年去美国普林斯顿,做了许多重要的工作。1939年,正当英国面临战争的多事之年,他回到了皇家学院。在整个第二次大战中,他受聘于英国外交部的通讯处,用他特有数学知识设计了破译密码的机器《Ultra》,为反法西斯战争的胜利作出重要的贡献,获得了帝国勋章。

$P=NP?$

图灵机不过是理想的计算机,其速度慢得惊人,当我们使

用计算机时,即使是现代最快的计算机,也仍得考虑时间的因素。举个例子来说,“写出 a_1, a_2, \dots, a_{25} 的全部排列”,这似乎是并不复杂的问题,但 $25! = 1.55 \times 10^{25}$ 。即使一架机器每秒能写一亿个排列,也得 5 亿年才能完成。因此,计算机光能算还不行,还得讲究“效率”。

提高效率的方法是设计好的算法。或者说给出“有效”的计算机程序。我们用 n 表示问题的规模。如果在这一规模下,要达到预期目的,图灵机所要进行运算的次数 $f(n) = n^k$ (k 是常数),就称为这一算法是有效的,或者称“多项式的”。有效算法也简称为 P 。如果语句长 n 是 60,当 $f(n) = n^5$ 时,用每秒百万次的计算机需要 13 分。但当 $f(n) = 2^n$ 时,那末同样计算机将要 366 个世纪才能完成。这些数据说明指数级的 $f(n)$ 将引起计算复杂程度的急剧增长——所谓“指数爆炸”。因此寻找多项式增长的有效算法是很重要的。

是否任何问题都能找到有效算法?也就是说,是否任何问题都是 P 问题?答案是否定的。1974 年,费歇(M. Fisher)和拉宾(M. Rabin)证明普莱斯伯格(Presburger)算术不是 P 问题。

人们用“非确定的图灵机”也可以检验一个问题是否有一个道路,使任何长度为 n 的语句其道路长度都不会超过多项式复杂度。如果有,这就是一个所谓的 NP 问题。由于非确定图灵机比图灵机强得多,所以 P 显然一定是 NP : $P \subset NP$ 。那末 $NP \subset P$ 是否成立?合起来,就是计算机科学一个举世瞩目的课题: $P = NP$?

从图灵机到今日的计算复杂性问题的研究,尚有许多悬而未决的问题。它和数理逻辑、抽象代数等学科紧密联系着。在 20 世纪数学中,这类相对比较年轻而又有巨大实用价值的

分支,正在伸开双臂欢迎有志之士的努力。

第六节 科学的数量化进程、数理统计学

一、科学的数量化进程

60年代以来,计算机技术迅猛发展,信息时代到来。计算机象收音机播音乐那样将数学渗入各门学科。科学的数量化进程步伐越来越大。包括社会科学在内的各个领域都在数量化。经济数学、生物数学成就巨大,诸如数理语言学、数学考古学、数量历史学、数学心理学、数学社会学等等也迅速成长。数学的功效为更多的人所认识。

就以生物数学为例,说明科学数量化进程。本世纪20年代中期,意大利生物学家达松纳(D'Ancona)研究地中海各种鱼群的变化及彼此影响,他发现鲨鱼及其他凶猛大鱼的捕获量在全部渔获量中的比例有戏剧性的增加。达松纳为鲨鱼等的成倍增长感到困惑。他提出的一种理由是:由于战争使渔业萧条,捕鱼量下降,因而供鲨鱼等凶猛鱼类食用的鱼较多,也因而鲨鱼有了大幅度的增加。但是这个理由还说不大通。捕鱼量小,作为鱼饵的小鱼也应该多起来,鲨鱼虽然也会多,其总体比例应该不变。什么理由使得鲨鱼的增长要比一般小鱼的增长更快呢?

达松纳竭尽一切生物学上的解释都不能解开这个谜,于是转而求教于他的同事——著名的意大利数学家伏尔泰拉(V. Volterra, 1860~1940),伏尔泰拉建立了一个数学模型,用微分方程式描述捕食者与被捕食者之间的相剋相生的图景。解这组微分方程,得到

$$H = \frac{a_2 + c}{b_2}, \quad \bar{P} = \frac{a_1 - c}{b_1}。$$

其中 \bar{H} 和 \bar{P} 分别表示被食者和捕食者的平均数, a_1, a_2, b_1, b_2 都是参数, c 是捕鱼量。从上式中可知, 当 c 减小时, 捕食者 \bar{P} 增加, 被食者 \bar{H} 减少。当捕鱼量 c 增加时, 捕食者 \bar{P} 减少, 被食者 \bar{H} 增加。数学模型终于给生物学一个满意的答复。这一模型现称为伏尔泰拉原理, 已在许多生物学领域中应用。例如使用农药杀虫剂, 若把害虫及其天敌一起毒杀, 则由于杀死害虫数量猛增(杀虫剂之功效), 按伏尔泰拉原理, 都会使捕食害虫的天敌下降更快, 引起不利后果。这也是为什么不能大量使用剧毒农药的原因之一。

生物数学最早发源于生物统计学, 英国的卡尔·皮尔逊(Karl Pearson, 1857~1936)把统计思想用于进化论。后来英国的费歇尔(R. A. Fisher, 1890~1962)也为统计学和生物学结合作出了重大贡献。

生物界现象的复杂程度远远超过物理现象和化学现象, 它所使用的工具必然多样化。伏尔泰拉原理应用了微分方程; 进化论和试验设计用了数理统计学; 人口和种群理论依赖于概率论; 遗传结构离不开抽象代数; 托姆的突变理论可用于胚胎学、形态发生学、动物行为学; 生命的摇篮 DNA 依赖于代数、几何学、拓扑学, 哈代给出了群体遗传学的基本法则; 此外, 还有应用数学建立的各种各样的模型, 例: 蜘蛛网模型、病害蔓延模型、细胞分裂的生长模型等等。数学正在向生物学大举进攻, 尽管有些生物学家只相信自己眼睛的观察, 对用脑子推断的模型不屑一顾, 但是多数生物学家感到数量化的重要性。目前, 数学方法几乎已渗透到生物学的每一个角落, 统计生物学、数学生态学、数学遗传学、数学生物分类学可作为其中的四大分支。从 60 年代以来, 这四大分支几乎每年都有国际会议。全世界以生物数学为主的杂志已达 40 余种。著名的

科学书籍出版社—Springer 出版社,已出版《生物数学丛书》(已出 10 卷)和《生物数学讲座》(已出 40 卷)。

生物数学的发展正方兴未艾,随着数学越来越多进入生物学、生物学的“数量化”进程越来越快,以至有人预言:生物学将会取代物理学成为使用数学工具最多的部门。如果说 19 世纪“数学在生物学上应用几乎等于 0”,那末 21 世纪可能是生物数学的黄金时代。

二、数理统计学

1976 年,美国食品和药品管理署宣布禁用“红 2”作为食品色素添加剂。其根据是用数理统计方法判定出:将五个水平的“红 2”喂养小白鼠,高水平喂养的小白鼠组患恶性肿瘤高于低水平组。这只不过是广泛应用数理统计的一个例子。从一个总体中抽取样本,将收集来的样本的数据加以整理,并从中引出认识总体的结论,这是科学研究工作和日常生活中屡见不鲜的现象。在社会科学中,选举人对政府意见的调查、民意测验、经济价值的评估、产品销路的预测、犯罪案件的情况,哪一样能离开统计?无孔不入的数理统计在 20 世纪获得如此巨大发展和迅速普及、确是数学史上值得提及的大事。

最初的一个重要统计论据在 19 世纪的地质学中可以找到。莱尔(Charles Lyell)于 1830~1833 年出版了三卷《地质学原理》,他根据各个地层中化石种类和现仍在海洋中生活的种类作出百分率,然后定出更新世、上新世、中新世、始新世的名称。这些名称沿用至今,可是定出这一名称的方法——类似于数理统计的方法,却被人遗忘了。生物家达尔文(Darwin, 1809~1882)关于进化论的工作主要是生物统计的,他在乘坐比格尔(Beagle)号到美洲的旅途上带着莱尔的上述著作,二

者看来不无关系。

从数学上对生物统计进行研究的第一人,乃是皮尔逊(K. Pearson, 1857~1936)。他在伦敦大学学院学习,然后去德国学物理,1881年在剑桥接受学士学位。1882年任伦敦大学学院的应用数学力学教授。1891年,他和剑桥大学的动物学家讨论达尔文自然选择理论,发现他们在区分物种时用数据有“好”和“比较好”的说法。于是皮尔逊潜心研究数据的分布理论,在《Laws of Chance(机遇的法则)》提出“概率”和“相关”的概念。接着又提出标准差、正态曲线、平均变差、均方根误差等一系列数理统计的基本术语。这些文章都发表在进化论的杂志上。直到1901年,他创办《Biometrika 杂志(生物统计学)》,才使数理统计有了自己的阵地,这可以说是数学在进入20世纪时最初的重大收获之一。

数理统计作为一个数学学科的奠基者是一位英国人——费歇尔(R. A. Fisher, 1890~1962)。他1909年入剑桥,1912年毕业,攻读数学物理。毕业后,他去投资办工厂,又到加拿大农场管过杂务,也当过中学教员。1919年,他终于对生物统计学感兴趣,参加罗萨姆斯泰德试验站的工作,致力于数理统计在农业科学和遗传学中的应用。他将66年的施肥、田间试验和气候资料加以整理、归纳、提取信息,为他作理论研究打下基础。1933年,他离开罗萨姆斯泰德,在伦敦的大学学院教授优生学,1943年又到剑桥任遗传学教授。他在数理统计上的贡献是巨大的。年青时的工作,是用数学将样本的分布给以严格地确定,后来的理论工作有:数据信息的量测、压缩数据而不减少信息,对一个模型的参数估计等。最使科学家称赞的工作则是试验设计,它将一切科学试验从某一个侧面“科学化”了,不知节省了多少人力和物力,提高了若干倍的效率。在30

~50年代,费歇尔是统计学的中心人物。1959年,费歇尔退休后,在澳大利亚度过了最后三年。

英国是数理统计的发源地和研究中心,但从第二次世界大战开始,美国也发展得很快。美国数理统计的研究最有成效的是哥伦比亚研究组。他们在理论和实践上都有重大建树。其中最著名的是“序贯分析”,被称为“30年来最有威力的统计思想”。在1975~1976年出版的《现代统计学索引》中,序贯分析有55篇之多,至今它仍是统计领域中最占优势的领域之一。

“序贯分析”的创始人是沃尔德(A. Wald, 1902~1950)。他是罗马尼亚出生的犹太人。先后就读于克卢日大学和奥地利的维也纳大学。在那里,门杰(K. Menger)指导他学了一些统计学和经济学。1938年,德寇占领奥地利,沃尔德被送进集中营,不久美国设法把他营救出来,并移居美国。沃尔德用他学得的经济和统计知识在大经济学家摩根斯顿那里工作。沃尔德以前是研究纯粹数学的。1938年到美国才转行搞统计。在第二次世界大战期间,他首创序贯分析与决策函数理论,开创统计学新局面。1950年沃尔德因飞机失事死于印度,当时只有48岁。他从事统计工作也只有12年。

序贯分析理论,在反法西斯战争中发挥了作用,在战后获得巨大发展。沃尔德的决策函数理论也赢得了广泛的赞誉。沃尔德过早去世中止了他的事业,不过较他活得更长的费歇尔,对决策函数方法却并无好感。尽管如此,人们仍把沃尔德作为本世纪最杰出的统计学家之一。

数理统计在近几十年来续有发展,引人注目的是它的广泛应用,尤其是在经济计量学方面。数理统计学的发展固然意义重大,而在全世界人口中普及统计知识的重要性也许更为

人们所重视。60年代以来教育上的“新数学”运动,使大量现代数学进入中学数学课本,但到70年代以来又纷纷退出。唯有统计学牢牢地站稳了脚跟。作为一个现在社会中普通居民,不懂些统计已经应付不了大量的数据和信息。有人认为,统计知识还将进一步普及,它一定会比解二次方程更为人所知,这恐怕不是言过其实的。

第七节 世界数学中心的转移

数学研究在古代只是在少数地方,由少数学者所从事的活动,到了17、18世纪,由于数学教育的发展,数学知识的传播,数学迅速地在英国、法国、德国、意大利、俄国等国发展起来。其中最突出的有一个是法国数学学派,他们中的大多数来自巴黎理工科大学,另一个是以哥廷根大学为中心的德国数学学派。发展成为一个广阔的分析领域,并得到广泛的应用。接着活跃在数学界的是法国的“三L”,即拉格朗日、拉普拉斯和勒让德。拉格朗日在方程论方面丰富了代数学的内容,在数论、连分数、微积分、微分方程、变分法等方面都写了大量的论文。傅立叶和柏松是19世纪初叶的法国两颗数学明星,他们都从事应用数学的研究,并且在巴黎高等理工科大学任教。1822年,傅立叶发表了著名的《热的解析理论》,这是数学理论应用于物理的典范,它开辟了近代数学的一个巨大分支——傅立叶级数、傅立叶积分、傅立叶变换,这些统称为傅立叶分析。在数学分析的发展史上,极限理论的建立具有划时代的意义,这一工作是由大数学家柯西、外尔斯特拉斯等人完成的。柯西出生于巴黎,1805年入巴黎高等理工科大学,并获得拉格朗日和拉普拉斯的赏识。柯西兴趣广泛,他的数学专著、

讲义和论文据统计超过七百种,有 26 卷之多,在数量上仅次于欧拉。柯西是数学分析方面集大成的人物,数学分析方面主要著作有三本:《分析教程》、《无穷小计算概要》和《微分学讲义》。这几部著作具有划时代的价值,给出分析学一系列基本概念严格定义,奠定了以极限论为基础的现代数学分析体系。

19 世纪末,世界数学中心在法国,庞加莱是首屈一指的权威,是高斯和柯西之后无可争辩的数学大师。庞加莱是一个数学的“万能者”,可以说是能对数学的所有分支(纯粹数学和应用数学)都作出贡献的最后一个人。他在微分方程自守函数、天体力学、拓扑学的研究方面都具有开创性的工作,并产生深远的影响。到本世纪初,法国数学渐渐集中在函数论方面,出现了波莱尔、勒贝格、毕卡等大数学家。由于第一次世界大战法国把年青的数学家和大学生都送到前线大批死亡,这个函数论的王国后继乏人,加上过份狭窄的研究领域,法国数学失去了世界数学中心的地位。

对 20 世纪数学的开创和发展起着核心作用的是德国哥廷根数学学派。20 世纪哥廷根学派的全盛时期是从克莱因、希尔伯特开始的。克莱因以其著名的《埃尔朗根纲领》闻名于世,他从变换群的观点出发,把当时已有的各种几何学加以分类,他是哥廷根学派的组织者和领导者。希尔伯特在代数、几何、分析乃至元数学上的一连串无与伦比的数学成就,使他成为无可争辩的哥廷根数学学派的领袖人物。1900 年,他在巴黎的国际数学家会议上发表演说,提出了著名的 23 个问题,表示他将领导新世纪的数学新潮流。从 1900 年到 1933 年,德国的哥廷根大学成为世界数学的中心。在哥廷根,闵可夫斯基为狭义相对论提供了数学框架——闵可夫斯基四维几何;外

尔最早提出规范场理论,并为广义相对论提供理论依据;冯·诺依曼对刚刚降生的量子力学提供了严格的数学基础,发展了泛函分析;女数学家诺特以一般理想论奠定了抽象代数的基础,并在此基础上刺激了代数拓扑学的发展;柯朗是应用数学大家,他在偏微分方程求解方面的工作为空气动力学等一系列实际课题扫清了道路。以上极不完全的列举,已足以证明,德国的哥廷根确是国际数学中心。

1933年希特勒法西斯上台,把哥廷根学派全毁了。疯狂的排犹,使得哥廷根的主要数学家移居美国。这里只需列出一张从德国(包括奥地利、匈牙利)到美国避难的数学家和物理学家的部分名单,就可见人材转移之一斑了。

爱因斯坦(1879~1955,伟大的物理学家)

弗兰克(J. Franck, 1882~1964, 1925年获诺贝尔物理学奖)

冯·诺依曼(1903~1957,本世纪杰出数学家之一)

柯朗(1888~1972,哥廷根数学研究所负责人)

哥德尔(1906~1976,数理逻辑学家)

诺特(1882~1935,抽象代数奠基人之一)

费勒(W. Feller, 1906~1970,随机过程论的创始人之一)

阿廷(1896~1962,抽象代数奠基人之一)

费里德里希(K. Friedrichs, 1901~1983,应用数学家)

外尔(1885~1955,本世纪杰出的数学家之一)

德恩(1878~1952,希尔伯特第3问题解决者)

此外还有波利亚、舍荀(Szegò)、海林格(Hellinger)、爱华德(Ewald)、诺尔德海姆(Nordheim)、德拜(Debye)、威格纳(Wigner)。

外尔和冯·诺依曼在美国的普林斯顿高等研究所任教

授,诺特则在普林斯顿附近的 Max Bown 女子学院,柯朗在纽约大学任教,创办了举世闻名的应用数学研究所。从此以后,美国数学居世界领先地位,普林斯顿取代哥廷根成为世界数学的中心,一直至今。

俄罗斯是当今的又一数学大国。俄国的数学有良好的传统,早在 18 世纪,欧拉这位大数学家在彼得堡工作过 31 年,19 世纪俄国出现了创立非欧几何蜚声全球的数学家罗巴切夫斯基。19 世纪后半叶,切比雪夫培养了马尔柯夫、李雅普诺夫等优秀数学家,形成了以切比雪夫为首的彼得堡学派。进入 20 世纪以后,莫斯科学派发展迅速,在函数论方面作出巨大世界贡献,自 20 年代以来,莫斯科的函数论学派取代法国跃居首位。该学派的创始人是叶戈洛夫和鲁金。莫斯科学派人才济济,亚历山大洛夫是本世纪拓扑学奠基人之一;柯尔莫戈洛夫是一位数学天才人物,他将概率论公理化尤为人所称道;邦德里雅金是著名的拓扑学专家等。康脱洛维奇也是苏联著名数学家。他最出名的工作是在研究国民经济计划上提出的线性规划解法,目前已成为经济数学最基本的课题,具有强大的生命力。为此获得 1975 年诺贝尔经济奖。60 年代以后,苏联数学更有重大进展,阿诺德 (Arnold)、诺维科夫 (Novikov)、曼宁 (Mannin) 等年轻人在拓扑学上有重要成就。现在的莫斯科也被人们视为世界的数学中心之一。

在本世纪 20 年代末 30 年代初,法国的一批年青的数学家迪多内 (Dieudonné, 1906~), 威伊 (A. Weil, 1906~), 亨利·嘉当 (H. Cartan, 1904~), 薛华荔 (C. Chevalley, 1909~1984), 组成了名为布尔巴基 (Bourbaki) 的团体, 倡导法国数学改革, 提倡结构主义, 研究整个数学, 编著《数学原本》, 在二次大战后风靡一时, 对 20 世纪数学有深远影响。“布尔巴基”

现在还活着,但是已经老了,更年轻的法国数学家在开拓新领域。现在巴黎又恢复了西欧数学中心的地位。

值得一提的是波兰数学。这个曾被瓜分的小国,在1920年开始数学起飞,他们集中在一个相对狭窄的领域里:集合论与泛函分析,形成了自己的特色,出现了一批杰出的数学家如巴拿赫(Banach, 1892~1945),夕尔宾斯基(Sierpinski, 1882~1969)等人。他们的学生如Ulam、Eilenberg、Tarski等人后来移居美国等地,在世界数坛著称。

日本,在1898年派遣高木贞治到德国哥廷根随希尔伯特学习代数数论。1920年他创立实域论,使日本数学跻身于先进之列。第二次大战后,小平邦彦、广中平祐等人又获世界最高数学奖——菲尔兹奖,与世界水平的差距不断缩小。

美国和俄罗斯继续领先,西欧紧随其后,日本正在迎头赶上。有12亿人口的中国,看当今数学情势,看来是很有希望的。中国有丰富的智力资源,潜力极大。只要善于开发,用力追赶,中国成为“21世纪的数学大国”,是完全能够实现的。

第八节 四年一度的菲尔兹奖

1897年,第一次国际数学家会议在瑞士苏黎士举行。会上决定1900年在巴黎召开第二次国际数学家会议。在巴黎会议上,希尔伯特发表了著名演说,提出了23个问题,具有重大的历史意义。国际数学家会议(International Congress of Mathematician)简称ICM,每四年举行一次。

四年一度的菲尔兹奖和ICM是紧密相关的。从1936年ICM-10起,每届ICM的第一项议程就是宣布菲尔兹奖荣获者的名单,介绍他们的业绩。这是当今数学家可望得到的最

高奖励,有人称菲尔兹奖为数学诺贝尔奖。

这个奖的提案人是已故的加拿大数学家菲尔兹(J. C. Fields)。他 1863 年生于加拿大的渥太华。在多伦多上大学,而在美国的约翰·霍普金斯得到博士学位。1892~1902 年游学欧洲。以后重回多伦多大学执教。菲尔兹本人的工作集中在代数函数方面。但他学术上的贡献不如作为一个科研组织人的贡献来得大。1924 年,菲尔兹成功地在多伦多举办 ICM—7。正是在这次大会上,菲尔兹提出把大会结余的经费用来设立一个数学奖金。可能是由于组织 1924 年 ICM—7 的劳累,他一直身体不好。1932 年 8 月 9 日在多伦多去世。去世前,他立下遗嘱并留下一大笔钱加到前述的剩余经费中。这笔钱由悉涅(Synge)转交给 1932 年在苏黎世召开的 ICM。为了纪念菲尔兹的去世,大会决定接受这笔奖金。菲尔兹曾要求奖金不要以个人、国家或机构来命名,而用“国际奖金”的名义。但是,大家没有听取他的意见,“菲尔兹奖”的声誉很快传遍全世界。菲尔兹生前没有看到授奖活动,第一次评奖是在 1936 年的奥斯陆会议才进行的。

菲尔兹为什么要提出设立这样的奖金,并没有一个可靠的说法。一种说法是,诺贝尔不设数学奖,促使菲尔兹发起这一奖金。据说,诺贝尔和瑞典数学家米他格—莱夫勒交恶,当诺贝尔获悉:如果有数学奖,米他格—莱夫勒将是首次获奖人的重要人选时,决定不设数学奖。然后,菲尔兹和米他格—莱夫勒的联系十分密切,决定用自己的努力和诺贝尔抗衡。也有人说,菲尔兹坚持数学研究的国际性是他设奖的原因。1920 年,在第一次世界大战中战败的德国,拒绝参加在法国斯特拉斯堡举行的 ICM(因为斯特拉斯堡在一次大战前是德国领土)。菲尔兹看到这种国家主义倾向带来的危害,决定设立国

际奖金来提倡国际主义。不管怎样,设立奖金是一项极为复杂和困难的事业。当菲尔兹最终获得了成功,人们普遍钦佩他的远见卓识。

1936 年刚开始授予菲尔兹奖时,并没有在世界上引起多大的注意。数学专业的大学生未必知道这个奖,科学杂志也不报道获奖者及其业绩。其社会影响无法与诺贝尔奖相比。但是半世纪以后的今天就很不一样了。每届 ICM 的召开,从数学杂志到一般的科学杂志都争相报道获奖人物。菲尔兹奖的荣誉不断在提高,终于被人们认为:这是数学界的诺贝尔奖。

菲尔兹奖的一个最大特色是奖励年轻人。根据菲尔兹的倡议,主要是奖励已获得的成果,但也含有鼓励获奖者取得进一步成就的希望。这意味着菲尔兹奖将授予那些能对未来数学发展起重大作用的人。一般是中青年才能做到。该奖的获得者当时都不超过 40 岁。这一点在刚开始时似乎是不成文的,后来则作了明文规定。

菲尔兹奖受到世人重视,客观上是因为数学已渗入到几乎所有的学科,走向社会的每一角落,人们关注当今数学的成就,然后最根本的一条,还在于得奖人的出色才干。任何一个奖励,从来都是先靠获奖者的成就给该奖带来荣誉,其次才是奖励的名声给获奖者的名誉。从 1936 年开始,获菲尔兹奖的已有 30 多人。他们不仅在当时作出了重大的成果,而且在日后仍然不断前进,证明他们并非昙花一现的人物。例如 1974 年的得奖者朋比利(Bombieri, 1940~), 1978 年的得奖者德利涅(Deligne, 1944~), 1982 年得奖的邱成桐(1949~),都是在当今数坛上作出多方面重大贡献的数学家。

1954 年 ICM 会议上,韦尔用不同寻常的词句赞扬当年的得奖者小平邦彦和塞尔(J. - P. Serre):“象我这样年纪的

人,要跟上年轻一代在数学方法、问题、成果方面的进展是困难的,……,一个老年人是不容易跟上你们的步伐的。……数学界为你们两位所做的工作而感到骄傲。这表明数学这株扭曲的老树依然充满活力与生机。你们是怎样开始的,就怎样继续下去吧!”

数学家正象韦尔希望的那样,依然充满着生机。一届又一届的菲尔兹奖获得者在继续向数学的深度和广度开拓,再开拓!

自1978年起,又出现了一种与诺贝尔奖金数额相当的国际数学奖——沃尔夫数学奖。这项数学大奖一两年颁发一次,对获奖人的年龄没有限制,因而能在全世界范围内按其一生的全部工作来遴选杰出数学家,如H.嘉当、柯尔莫哥洛夫、陈省身、小平邦彦等获奖人,都是当今世界上最负盛名的数学家。

沃尔夫奖的评奖委员会由世界著名科学家所组成。由于得奖者都是世界上作出卓越贡献的科学家,这些科学家的巨大声誉使该奖广为人知。由于数学没有诺贝尔奖,得沃尔奖的数学家又都是极负盛名的,因而数学界对该奖极为重视。

第九节 非标准分析、突变理论、模糊数学

60年代以来,数学界的思想极端活跃。世界数坛上不断传出惊人的消息。评论家呼之为“一场革命”,其中最引人注目的是非标准分析、突变理论和模糊数学的出现。

一、非标准分析

无穷小重返数坛,这是非标准分析给我们带来的“革命”

信息。话可以从牛顿时代说起。试看求 $y=x^2$ 的导数。先取无穷小量 Δx , 则 $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$, 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$, 又因为 Δx 是无穷小量可忽略不计, 即得 $y'=2x$ 。无穷小量 Δx 在这里既不是 0(可用 Δx 去除), 却又等于 0(最后忽略不计, Δx 就消失了)。这套办法似乎有点像变魔术, 马克思称略去 Δx 是“暴力镇压”, 大主教贝克莱则称之为“逝去量的鬼魂”或“已死量的幽灵”(ghosts of departed quantities)。围绕微积分的一场争论曾在 18 世纪初激烈进行。这种把无穷小神秘化的做法确实不太好, “召之即来, 呼之即去”, 完全是神差鬼使的一套。然后不管如何攻击, 它的运算结果却总是对的。大数学家, 曾用这种不严格的微积分做出了辉煌的成果。渐渐地人们也不再有异议了。

到了 19 世纪, 法国数学家柯西认识到, 结论正确并不意味着体系完整, 于是着手使“无穷小分析”严格化。这就是著名 $\epsilon-N$ 和 $\epsilon-\delta$ 说法, 这个说法到 19 世纪 70 年代才由外尔斯特拉斯完成。这种寓动于静表示极限过程的描述, 把神秘化的外衣去掉了: 所谓无穷小, 不过是极限为 0 的变量而已。它不是“一个数”, 而是一个变化过程, 即不断向常量 0 以误差可任意小进行逼近的一个变量。然而, “无穷小”不是数, 不能直接除, 也不能忽略不计, 生动活泼的运算淹没在形式的海洋里, 人们抱怨微积分越来越难学。20 世纪以来, “无穷小”几乎销声匿迹, 偶而提到它, 也不过是习惯性的名词介绍而已。

1960 年秋事情有了转机。数理逻辑学家阿伯拉罕·罗宾逊(Abraham Robinson, 1918~1974)在普林斯顿大学的一次报告中指出: 现代数理逻辑的概念和方法能为“无穷小”和“无穷大”作为“数”进入微积分提供合适的框架。罗宾逊的基本想

法是：无穷小既然不是一个“数”，即在实数系 R 中没有它的位置，那末我们能否把实数系 R 扩大，使之成为新数系 R^* ，而微积分在 R^* 中实施时，能够保持当年牛顿—欧拉时代的直观和简便易行？罗宾逊用数理逻辑中模型论的方法做到了这一点。在 R^* 中，每一通常实数是标准数，它的周围聚集着许多“无穷小”（非标准实数），就象电子围绕原子核一样。在 R^* 中没有阿基米德性质，即任取正数 α 和 β ，不一定能找到自然数 n ，使 $n\alpha > \beta$ ，因为无穷小是大于 0 的非标准实数，它的任意整数倍仍是无穷小，不可能大于正标准数 β 。

1965 年 4 月，罗宾逊写了《非标准分析》一书，广为流传。1966 年是非标准分析的重要里程碑：人们在摒弃了“标准”的方法，而应用了“非标准”的方法之后，得以解决希尔伯特空间理论中艰涩的难题。时至今日，已经有非标准的群论，非标准的泛函分析，非标准的拓扑等分支相继问世。

二、突变理论

突变理论“热”轰动一时，是 60 年代末 70 年代初的又一大新闻。法国数学家勒内·托姆(René Thom, 1923~)——菲尔兹奖获得者，从 1968 年开始陆续发表文章，论述“突变理论”(Catastrophe Theory)。1972 年，出版《构造稳定性和形态发生学》一书，一时风靡世界。

托姆是一位卓有成就的拓扑学家，他以协边理论的创造驰名于世。60 年代以来，他致力于高维空间曲面的研究，用微分拓扑的方法分析曲面的奇点，并进行分类。他考察由不超过 4 个自变量的函数（一个或两个）决定的曲面，用局部微分同胚的方法考察奇点周围的性质，共得出 7 种基本类型。每一种类型表示一种不连续现象，当变量进入分支区域时，函数可以

取 n 个值,相当于 n 叶折叠的曲面,这表明在分支区域内,函数值处于不稳定状态,即可从一值跳到另外一值。这正是不连续现象的特征。托姆在那本书中,用微分拓扑中的结论去解释胚胎生长的突变、物理光学中的突变以及语言学上突变等等,确实一新耳目。许多学科都涉及突然变化现象,不少人认为托姆这本书可能给他们带来了福音,于是竞相套用现成的结论。在 70 年代初期开始出现热潮。下面是一些可以用突变理论解释的题目:胚胎学、人性学、医学、生态学、地质学、光学、激波、船舶稳定,以至囚犯骚动、战争爆发、市场崩溃等等,几乎无所不包。

值得一提的是英国沃里克大学著名的数学教授齐曼在“突变热”中起了很大推动作用。齐曼早年致力于拓扑学,颇有建树。当他接触托姆的理论后,便被吸引住了。他认为,微积分是一种数学模型,它能解释像地球绕太阳旋转那样连续变化的自然现象,并加以计算和预测。然而对于充满突变和跳跃的自然现象来说,这是太不够用了。水突然沸腾,火山爆发,房屋倒塌,蝗虫急速繁殖,病人忽然休克,由量变发展为质变,乃是司空见惯的现象。但迄今为止,还没有一种数学理论能够从数量上给出一个模型。现在托姆居然做到了,他十分兴奋,并组成一个研究团体,悉心钻研,扩展应用。齐曼教授称突变理论是“数学界一次智力革命——微积分以后最重要的发现”。

三、模糊数学

1965 年,《模糊集合》的论文发表了。作者是美国加利福尼亚州立大学的柴德(L. A. Zadeh)教授。康托的集合论已成为现代数学的基础,如今有人要修改集合的概念,当然是一件破天荒的事。此后十余年,办杂志,出专著,形成一支不小的队

伍。不论在国际上还是我国国内,“模糊”研究正方兴未艾。

经典集合论中,在确定一个元素是否属于某集合时,只能有两种回答:“是”或者“不是”。我们可以用两个值 0 和 1 加以描述,属于集合的元素用 1 表示,不属于集合的元素用 0 表示。然而现实生活中还有另一类集合,不能这样描述。比如“高个子”,“年青人”,“漂亮的人”等,情况要复杂得多。假如规定 1.8 米算属于高个子范围,那末 1.79 米的算不算?照经典集合论的观点看:不算。但这似乎很悖于情理。如果用一个圆,以圆内和圆周上的点表示集 A,而且圆外的点表示不属于 A。A 的边界显然是圆周。这是经典集合的图示。现在,设想将高个子的集合用图表示,则它的边界将是模糊的,即可变的。因为一个元素(例如身高 1.70 米的人)虽然不是 100%的高个子,却不算比较高,在某种程度上属于高个子集合。这时一个元素是否属于集合,不能光用 0 和 1 两个数字表示,而可以取 0 和 1 之间的任何实数。例如对 1.70 米的身高,可以说具有 70%属于高个子集合的程度。这样做似乎啰嗦,但却比较符合实际。

不仅普通存在着边界模糊的集合,就是人类的思维,也带有模糊的特色。例如我们到车站去接一个未见面的人,只凭信中所说的身高,体型,面部大致轮廓即可认出。要认定一个长大胡子的人,并不需要知道他究竟有几根胡子。恰恰相反,知道得太精确,反而不能很可靠地工作(一时无法核对来人究竟有几根胡子)。人们实际上凭来人的模糊信息和信中样本比较,就能作出判断。被誉为“计算机之父”的冯·诺依曼曾指出:“人脑是这样一台计算机,它在一个相当低的准确水平上、非常可靠地进行工作。”人脑只有二至三位十进数的准确度,然而具有相当高的可靠程度。人脑既会处理精确信息,又能处

理模糊信息。探讨人工智能看来离不开模糊数学。

集合是现代数学的基本概念,模糊集合一提出,“模糊”观念也渗透到许多数学分支。模糊拓扑在国内拥有众多的研究者。其他还有模糊线性拓扑空间、模糊逻辑、模糊映射、模糊控制等等,不一而足。

20 世纪 60 年代开创的三个新的数学分支:非标准分析、突变理论、模糊数学,都还处于初时期。有褒有贬,目前下结论为时尚早。一哄而上似乎不必,一概骂倒更不可取。任何新的数学思想或方法,开头一般必有争论。谁是谁非,只有经过实践,由历史来作出判决。它们的创立是不是数学上一场“革命”,也许得经过半个世纪才能作出令人满意的回答。

第十节 20 世纪的数学教育、数学奥林匹克竞赛的历史

一、20 世纪的数学教育

19 世纪数学取得了突飞猛进的成就,然而数学教育却进展不大。直到 20 世纪,数学教育才有长足进步,进入了一个新的阶段。

近代数学教育改革的首创者,是英国伦敦皇家学会的力学与数学教授培利(John Perry, 1850~1920)。培利出身贫寒,曾干过多年苦力。英国早年的数学教育改良及社会上对数学教育种种不满,责难,给了他深深的印象,由此,他决心对数学教育做一番彻底的改造。由培利发起的数学改革运动,打响了 20 世纪数学教育改革的第一枪。他提倡“实用数学”,设置“数学实验室”,用方格纸对没有学过代数和几何的人讲“解析几何”。他指出“那种抽象的算学教育,百人中仅有五人成功”,

而“我们没有像欧几里得时代那样多的空间、时间了。”培利的数学教育改革打破了在数学教育中欧氏几何一统天下的格局,并使许多新内容如圆锥曲线、微积分等进入了中等数学教育。他的数学教育改革,对全世界的数学教育产生了积极影响。

真正对世界数学教育有重大贡献者,当推德国大数学家克莱因(F. Klein)。他并不像有些数学家一样,认为不应该关心中等数学教育,他直接推动了德国的数学教育改革。他以大数学家的权威,适应德国新兴工业的发展,倡导了数学教育改革,其核心思想是:(1)提倡数学理论的应用;(2)教材内容应以函数概念为中心;(3)运用教育学、心理学的观点指导教学活动。这些意见,反映了本世纪初的社会实际、经济发展要求以及数学学科成就的新观念。试想,如果数学的中心内容是以函数为研究对象的微积分,当然要以函数为中心。如果要满足当时以机械电气工业为主体的经济结构,那末求解微分方程必然放在首要地位。由于普及义务教育制度的推行,教育学和心理学的的发展,数学教育方法的改革也提到议事日程上来了。克莱因的改革,集中体现在 1905 年的米兰学制上,这是当时国际科学家大会通过的一项标准学制案,以后经各国仿效改革,逐渐普及。

20 世纪下半叶,当时公认的有两位数学教育权威。一位是波利亚(G. Polya),他是一位著名数学家,同时又是数学教育的巨子。他在数学解题思维的分析,合情推理观念的形成,数学方法的总结归纳方面,都有独到的见解。他生于 1887 年,卒于 1985 年,活了 98 岁。1988 年在匈牙利举行国际数学教育大会时,大会主席加亨(Jean—Pierre Kahane)专为他去世发表大会演说,铭记他的功绩。

另一位权威人士是荷兰的弗赖登塔尔(H. Freudenthal), 他是一位拓扑学家, 30 年代时很负盛名。50 年代以后, 他致力于数学教育的研究。可以说, 他所提出的“数学现实”论、“数学化”过程分析, “再创造”教学方法等, 都是特定的“数学教育学”规律, 而不是“教育学”加数学例子的模式, 所以值得重视。由于弗赖登塔尔的威望和努力, 国际数学教育委员会(International Commission of Mathematical Instruction 简称 ICMI)于 1968 年重新建立(原来是克莱因领导的, 由于世界大战而停止)。以后每四年举行一次国际数学教育大会(International Congress on Mathematical Education. 简称 ICME)。弗氏还创办了一本国际性的数学教育理论杂志: Educational Studies in Mathematics。数学教学理论的研究由此进一步深入, 许多人把 1968 年以后称作数学教育的 ICMI 阶段。

80 年代以来, 数学教育研究处于持续发展的时期, 世界各国都投入大量的人力物力, 国际组织发挥了巨大作用。1984 年, ICME-5 在澳大利亚的安德里奇举行, 当时以数学为大众(Mathematics for all)为题作了专题研究, 联合国教科文组织将有关论文编成文集, 影响巨大, 这一口号现已成为数学教育研究的中心课题。1986 年 2 月, ICMI 在科威特召开国际会议, 议题是 90 年代的数学教育, 会上详尽地分析了数学教育的现状, 并展望未来的发展, 极有价值。与此同时, 许多国家成立了数学教育改革的组织, 发表了许多重要的研究报告。1982 年, 英国的柯克克劳夫特报告(Cockcroft Report), 详尽地分析了英国数学教育的社会需要、改革途径及观念更新等问题, 在世界上有巨大影响。英国的 SMP 教材越改越好, 也具有全球性影响。

苏美两国的情况值得重视, 苏联从 1967 年(十月革命 50

周年时)起进行数学教育改革,其领导人是世界大数学家柯尔莫戈洛夫(Н. К. Колмогоров)。这项改革,把用了100年之久的基谢辽夫教材废了。改革自然会有阻力,在勃列日涅夫的“停滞”时期,柯尔莫戈洛夫改革受到许多抨击,这使柯氏本已很糟的健康状况更加恶化,终于在1987年去世,但是叶尔肖夫院士在1988年的ICME-6的大会发言中说道,现在情况已有不同,勃列日涅夫的时期已经过去,柯尔莫戈洛夫改革中培养出来的数学家已成长起来,教师已经适应新的教材和建议,原苏联的数学教育改革必将继续。叶尔肖夫还指出,根据原苏联已通过的计算机科学化的国家计划,要求在9年级和10年级开设70学时《计算机和信息科学基础课程》,在1995年以前,使每一所中学至少有一个计算机教室,苏联数学教育正在进一步现代化。

美国的数学教育状况一直不大好,在各次国际性测试中都处于落后地位,朝野震动。从1986年起,国家科学理事会(NRC)的“数学科学部”和“2000年的数学科学委员会”,联合调查研究了三年,1989年1月,一份NRC报告公开发表,题目是“人人都得算算:关于未来数学教育的国家报告”。文中指出,美国今后20年在数学教育正面临挑战,信息时代将继续,国际竞争的压力在增加,美国工业要求改进产品的数量和质量,21世纪的工作岗位将较少体力劳动更多脑力劳动,较少机械化更多电子化,较少的例行公事更多的随机应变,较少的稳定性和更多的易变性,这些都要求美国人为了生存而思考,而且需要数学地思考。

这份报告中大声疾呼:“工作岗位上的技术已经数学化了,数学已经渗入整个社会,骄傲自满的美国已经吞下了数学教育成绩低下的苦果,我们所继承的数学课程,囿于过去,无

视未来,陷入了一种最少希望的传统。”“动员起来,为了改革!”

为了摆脱美国数学教育境况不佳,报告提出了面向 21 世纪数学教育的七个转变 报告说:“我们国家的目标要使美国的数学教育是世界上最好的。”总之,美国的数学教育正在急起直追。

我国的数学教育研究已有相当的基础,这支世界上最大的数学教师队伍,正在困难的条件下从事 12 亿人口的数学普及工作,有一批优秀的教师和杰出的数学教育成绩,数学奥林匹克竞赛中的中国学生们取得的优异成绩世所公认。“庞大的解题王国”应该产生一批优秀的数学教育理论成果,为世界数学教育事业作出自己应有的贡献。但是应该指出,我国数学教育研究的范围还比较窄,许多理论工作还没有跟上。为了深入开展数学教育研究,我们有必要从宏观和微观两个方面着手,从狭小的研究领域走出来,从考试数学的枷锁下解放出来,从传统的偏见摆脱出来,我国的数学教育研究是大有希望的。

二、数学奥林匹克竞赛的历史

中学生数学竞赛是一项群众性的课外活动。它对于激发学生学习数学的兴趣,拓展数学知识领域,培养数学思维能力,选拔数学人才,都有着重要的意义。由于数学竞赛与体育比赛在精神上有相通之处,所以大多数国家的数学竞赛都叫数学奥林匹克。

最早举办中学生数学竞赛是匈牙利 1894 年,匈牙利“物理—数学协会”慎重通过一项决议:为中学生举办数学竞赛。从此以后,除了在两次世界大战和匈牙利事件期间中断过七年外,每年十月都要举行,一直至今。每次竞赛有三个赛题,四

小时做完,允许使用任何参考书。这个竞赛的参加者都是完成普通教育的学生,即已经升入大学或综合技术学院的学生。从1923年起,匈牙利还举办一个“全国中学数学竞赛”,参加者是十一二年级学生。

数学竞赛为匈牙利选拔了不少优秀的数学人才。在早期优胜者名单里,我们可以看到这样一些名字:

费叶尔(Leopold Fejer, 1880~1959)他在复变函数与傅立叶级数研究方面做了很多工作。

冯·卡门(Theodore von Kármán', 1881~1963)著名的力学家,现代航天事业的奠基人。

寇尼希(Dénes König, 1884~1944)著名的组合数学家。

哈尔(Alfred Haar, 1885~1933)群上测度与积分论的创始人。

黎兹(Frédéric Riesz, 1880~1956)泛函分析的奠基人之一。

舍苟(Gabor Szegő, 1895~)著名的分析学家。

拉多(Tiber Radó, 1895~1965)对复变函数、测度论有重大贡献。

这些人物的出现,使得匈牙利成为一个在数学上享有声誉的国家,同时引起其他国家的兴趣,争相仿效。1934年在列宁格勒和1935年在莫斯科,由列宁格勒和莫斯科国立大学分别组织中学数学竞赛,并最先冠以数学奥林匹克的名称。这两个城市的数学竞赛一直延续至今。

现在,举办全国性中学数学竞赛的国家越来越多。据不完全统计,举办全国性数学竞赛国家有:保加利亚,波兰,捷克,斯洛伐克,中国,德国,俄罗斯,越南,南斯拉夫,荷兰,蒙古,英

国,芬兰,以色列,加拿大,希腊,澳大利亚,美国等。数学竞赛也像奥运会一样,成为一种国际性的交往活动。

首届“国际数学奥林匹克”(International Mathematics Olympic)简称IMO于1959年在罗马尼亚首都布加勒斯特举行。起初,参赛的国家仅限于东欧,1967年以后逐渐增多,并渐渐地吸引了所有中学数学教学水平较高的国家。

IMO每年举办一次,没有固定的组织与章程,只是每年都由参加国各举一人,组成委员会,东道国任主席。竞赛试题从各国提供的题目中挑选。比赛在两个上午连续进行,每次3道试题,规定时间4时完成。试卷的总分为40分。

1985年,我国派出两名选手参加IMO-26,以了解情况,取得经验。从1986年起,我国每年派出由六名学生组成完整的代表队参加IMO。值得指出的是,1990年7月9日至18日,第37届国际数学奥林匹克在北京举行。这是IMO第一次在亚洲国家举行。本届IMO有54个国家及地区的308名学生参赛。联合国教科文组织和IMO常设委员会派出要员督察。前来参加这一活动的国外人士近500名。竞赛结果,中国代表团获金牌五枚,银牌一枚,团体总分第一。

我国是开展数学竞赛活动较早的国家之一。1956年,在北京、上海、天津、武汉四大城市举办了我国第一届数学竞赛。1978年起,数学竞赛活动更是频繁。现在,我国不仅每年举办全国性高中数学联赛,同时还举办全国性的初中数学联赛。1986年,为了纪念著名数学家华罗庚逝世1周年,团中央等单位又举办了高年级小学生与初一学生参加的“华罗庚金杯赛”。1990年,小学数学奥林匹克开始举行。各省、市、自治区每年有数以万计的学生参加全国比赛,很多省市办起了数学奥林匹克学校。

数学竞赛有选拔人才提高数学教学水平的优点,但也可能带来忽视基础、沉溺于难题的弊病。但这和体育竞赛中的问题一样,应该恰当处理,不能因噎废食。在数学研究的难度迅速增加的今日,为了从青少年中选拔优秀人才,竞赛恐怕还是一种可以采用的方法。

第五章 现代中国数学

自从鸦片战争之后,中国古代的传统数学渐趋没落,西方数学大量传入中国。但是,由于“中学为体,西学为用”的指导原则,西方数学并没有在中国迅速普及,现代数学的学习进程非常缓慢,至于创造性的数学研究则完全谈不上。1894年甲午战争之后,中国大量向日本派遣留学生,数学方面也是如此。公元1900年的义和团事件,以向列强偿付高额的庚子赔款而告终。国势疲弱,何谈数学发展。1908年,以美国退回部分庚子赔款为契机,经过教育界人士的努力,陆续派遣留学生去美国学习科学技术,其中包括中国最早的数学博士胡明复和姜立夫等人。

在20世纪上半叶,特别是1911年辛亥革命和1919年五四运动之后,中国现代数学经历了快速发展的几个时期:20年代大量成立大学数学系,30年代出现一批现代数学的研究工作,成立中国数学会,40年代的优秀中国数学家已能做出世界上一流的工作,大学已能开出相当于博士水平的课程。1949年中华人民共和国成立,通过学习苏联,在数学发展的量与质方面均有可观的成就。时至今日,中国数学已具有良好的国际声誉和发展潜力,“21世纪数学大国”,是未来的奋斗目标。

第一节 中日数学实力的消长

日本的传统数学——和算,源于中国古算,后经关孝和(1642~1708)等大数学家的发展。和算有许多独到之处,例如行列式的雏形可以在和算著作中找到,1859年,当李善兰翻译《代微积拾级》之时,日本还停留在和算时期。19世纪以来,日本学术界,当然也尊崇本国的和算,对欧美“洋算”采取观望态度。1857年,柳何春三著《洋算用法》。1863年,神田孝平最先在开城所讲授西洋数学。可见,日本翻译和传播西算的时间均较中国稍晚。

值得注意的是,李善兰的著作和译作很快东渡日本,对中日两国的科学交流起过重要推动作用。1862年,日本的中牟田仓之助(1837~1916)来华访问,带回李善兰等翻译的《代数学》、《代微积拾级》、《谈天》、《重学》诸书,成为日本学习西方科学的主要媒介。日本数学史名家三上义夫(Mikami Yoshio)指出:“最早传入日本的西方数学书籍,肯定是李善兰和伟烈亚力翻译的由Loomis编写的《微积分》(《代微积拾级》)”,在1860年间日本和算家“能读到的最好微积分书籍只有Loomis的《微积分》中译本”。因此,在日本的明治维新(1868)之前,中国的数学实力仍然在日本之上。然而,仅仅30年之后,到1898年,中国向日本大举派遣数理留学生,形势完全逆转。为什么?关键在于日本的教育政策。

1868年,日本开始了“明治维新”的历史时期。明治5年,即1872年8月3日,日本颁布学制令。其中第27章是关于小学教科书的,在“算术”这一栏中明确规定“九九数位加减乘除唯用洋法”。1873年4月,文部省公布第37号文,指出“小学教则中算术规定使用洋算,但可兼用日本珠算”,同年5月的

76 号文则称“算术以洋法为主”。

一百多年后的今天,返观这项数学教育决策,确实称得上是“明智”之举。这对日本数学的发展,教育的振兴,起了不可估量的作用。

最初在日本造此舆论的当推柳河春三。他在 1857 年出版的《洋算用法》序中说“唯我神州,俗美性慧,冠于万邦,而我技巧让西人者,算术其最也。……故今之时务,以习其术发其蒙,为急之尤急者。”

明治以后,1871 年建立文部省,当时的文部大臣是大木乔任。他属改革派中的保守分子,本人并不崇尚洋学,可是他愿意推行教育改革。那时全国有一个“学制取调挂”,即“学制调查委员会”,其中多数人是著名的洋学家。大木乔任虽然并非“洋学家”,但尊重“学制取调挂”的决策,在文部省文件中宣布“算术唯用洋法而已”,一时和算家纷起抵抗。例如,和算家高久守静从明治五年起在学校里教和算,到了明治七年,全国完全废除和算,高久抗议无效非常生气,终于在明治十年提出辞呈。

东京理科大学教授小松醇郎在评价这一历史事件时说,当时的日本面临在政治、经济、教育、科学、文化各方面都赶上西方的任务。在这种国策指导下,很自然地认为新日本的数学必须坚决依靠洋算,和算无论如何不能完成这个任务。日本及早采用洋算成为日本数学、科学发展的重要因素,中国没有这样做,使中国的发展十分迟缓。

确实,我们应该作一番中日数学教育的对比。

从中国洋务运动(1860 年起)和日本明治维新时期来看,两国工业(如造船、铁路、纺织、电力等)起步时间和发展速度大体相同,相距不过数年。但是,在科学技术上的差距可就大

了,仅就数学方面来说,可作如下对照:

1872 年	日本开始全面教授西算	中国普及西算在 1911 年辛亥革命前后
1877 年	日本成立东京数学物理学会	1935 年 成立中国数学会
1877 年	东京大学理学部成立	1903 年 京师大学堂设立格致科
1893 年	数学开设 13 个讲座	1912 年 成立北京大学, 1917 年设立数学系
1879 年	成立日本学士院(即科学院)	1928 年 成立北平研究院
1896 年	日本远藤利贞出版《大日本数学史》	1919 年 李俨撰《中国数学源流考略》

这一差距显示了当时中日两国在科学文化方面的政策有很大不同。抚今追昔,恐怕会有许多经验值得我们吸取。

洋务派虽然想学习西方科学知识,可仍坚持“中学为体,西学为用”。所谓“炮船之巧拙,以算学为本”,“制器之精,算学明也”,只是一句空话。自 1847 年容闳留学以来,直到 19 世纪末,未闻有留学生习数学物理学而稍有成就者。李善兰固然才华超群,可他不懂外文,无法主动吸收西方科学知识,所知高等数学也就只能停留在微积分水平。加上京师大学堂并无研究风气,学生中又无人能继承李善兰的事业,中国数学也就不可避免地江河日下了。

反观日本,居然提出“废止和算,专学洋算”这样的貌似“民族虚无主义”的口号,在知识分子中提倡学习外国语,社会上学习西方科学形成风气。福泽谕吉的《西洋事情》(1868),竟发行 25 万册(相比之下,中国江南制造局翻译馆的 96 种译

著,到1879年为止,总共只卖了3111部)。日本的年轻人研攻数学和物理学代有人出。1877年,菊池大麓自英国学数学归国,进入文部省改革科学教育,成绩卓著。高木贞治于1898年远渡重洋,到德国的哥廷根大学(当时的世界数学中心)跟随希尔伯特(当时最负盛名的大数学家)学习代数数论(一门正在兴起的新数学学科),显示了日本向西方数学进军的强烈愿望。高木贞治潜心学习,独立钻研,终于创立了类域论,成为国际上的一流数学家,这是1920年的事。可是,在19世纪末,中国赴西洋留学专攻数学而稍有成就者竟无一人。当中国在1894年的甲午战争中败于日本,1898年向日本大举派遣留学生时,李善兰时代的数学优势,至此丧失殆尽。

第二节 xyzw 取代天地人物的历程

中算符号与西算符号完全不同。其实西算符号古时也不统一。就以记数的数码而言,巴比伦人用 ∇ 表示1,用 \blacktriangleleft 表示10,相当麻烦。古埃及用木棍 $|$ 记1,用绳 \cap 表示10。古希腊数学那么发达,要表示325,也要写成

$$\text{HHH } \triangle\triangle\Gamma$$

罗马数字现在还看得到,25要写成XXV,也够麻烦的。中国古代记数比较先进,即采用位置记数法。325可写作三二五,只不过习惯上是从上到下的直排就是了。

经过漫长的变迁,阿拉伯数码取代了西方的各种数码而归于一统。对欧洲人来说,这是向东方阿拉伯学的,连代数学(Algebra)也是从阿拉伯人那里学过来的。到文艺复兴以后,西方的数学符号逐步趋于统一,大体上形成现在通行的那种样子了。

但是,古代中国算学却从不采用任何外来符号。

闭关锁国是清代一项基本国策,在数学上亦不例外。曾有一位名叫黄濬兰的江苏督学,他在主持算学考试时,发现某考生答卷上凡用到数目之处,均写成阿拉伯数字,于是勃然大怒,斥责考生“用夷变夏,心术殊不可问”。立即停止了该发给这位考生的津贴,以示惩戒,最后该生发狂而死。使用阿拉伯数字竟然招来横祸,不禁令人感叹不已。

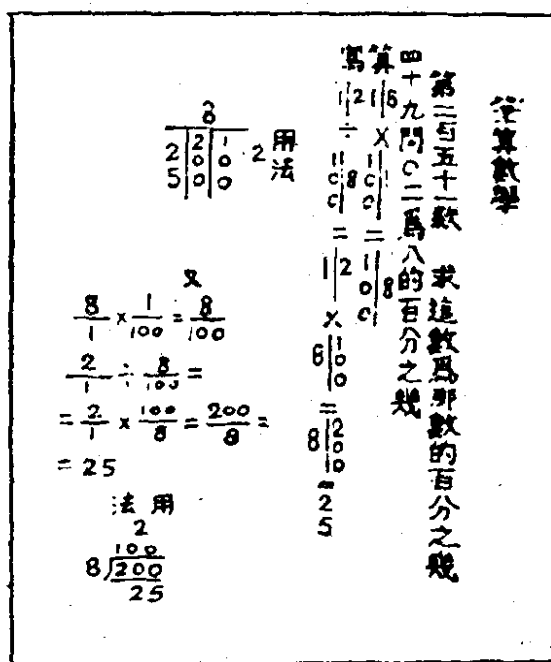
清末的数学领袖,自然非李善兰莫属,前已记述。他在翻译上的功绩,更获海内外一致赞扬。但李善兰和一切伟人一样,都不免带有时代的局限性。他一心想科学救国,曾指望“人人习算,制器日精,以威海外各国,令震慑,奉朝贡”。但在使用西方算学符号方面,却又谨小慎微,严守“祖宗家法”,沿用中算符号或硬造符号,而不愿或不敢大胆引进西方通用的符号与形式,在普及西算方面设下了诸多障碍。

李善兰和伟烈亚力在译《代微积拾级》时,采用过一些西方符号,如乘号 \times ,除号 \div ,等号 $=$,根号 $\sqrt{\quad}$,指数(位于右上角)等。但他更多是采用汉字替代西算符号。如阿拉伯数字(1,2,3...)改为汉字的数目字(一,二,三...)。26个小写英文字母用甲乙丙丁戊己庚辛壬癸的十字天干取代 $a\sim j$,续用子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥的12字地支取代 $k\sim v$,最后剩下的 $xyzw$ 则代之以天地人物。大写字母 A, B 等写成呬、𠂔等。希腊字母 α, β, γ 等则用28星宿的名称代替(即角、亢、氐等)。函数符号 f 用“函”,自然对数的底 e 用“讷”(指对数的发明者纳普尔, Napier)。求和符号 Σ 代之以“𠂔”。把加减号(+, -)改为上丁(取上、下两字之形状)。特别是微分符号“ d ”及积分符号“ \int ”,竟用微积两字的偏旁“彳”“禾”取代。这就形成了一套光怪陆离的符号体系,今人读之,宛若天书。试举数例:

$$\text{天} \div \text{天} \text{上} \text{地} \div \text{地} = \text{卯} \text{地} \div \text{天} \quad (x dx + y dy = n y dx)$$

$$\text{喝} \text{天} = \frac{-\text{丁} \text{天}}{-} \quad (\Sigma x^m = \frac{1}{1-x})$$

第二例中用了分数中分隔分子分母的横线符号,但因中文是从上到下的顺序,所以分母在上面,分子在下面。究其心态,当为保护“国粹”。但此类举动,未免狭隘。至今读来,竟有滑稽之感了。李善兰的译法,以后一直奉为范本,当时使用较广的数学教科书,不少是教会学校的传教士编译的。其中狄考文(Rev. Calvin. W. Mateer)和邹立文合译的《笔算数学》、《代数备旨》、《形学备旨》,谢洪赉、潘慎文(Rev. A. P. Parker)选译的《八线备旨》(三角学)和《代形合参》(解析几何学)等书最为普及。



《笔算数学》书影

狄考文是美国长老会传教士,1864年来华,在山东登州

创办蒙养学堂(齐鲁大学前身),是开办最早的教会学校之一。他是西方各国主张进行教育侵略的鼓吹者,编译了一套数学教材,借以培养亲美的高等知识分子。他深知“西学”在清朝受到抵制,在形式上必须使清朝官员易于接受。因此,《笔算数学》有文言和白话两个版本,以迎合不同需要。采用白话文的教科书这也是第一部。此外,《笔算数学》正式采用了阿拉伯数字。该书第一章第六款是“数目字的样式”,其中写道:“大概各国各有各国的数目字,但笔算上不能处处都合适。现在的笔算,大概都是用阿拉伯数目字,虽然各国发音不一样,而意思和字迹却都相同,这种字容易写,笔算也很合用,看大势是要通行天下万国的……”。但当时所用的阿拉伯数目字是采用直写的。狄考文为使读者易于接受,在《笔算数学》序中又称:“……但恐有人仍欲用横法,故书中一切算式俱将两法并列,随人择用也……”。

至于书的排印形式,仍然按照传统的直行规格。这对于初学者来说确实是有很多困难,不易接受。所以,到1903年,由彭致君编著的《代数备旨全草》改为横排形式。这确实是一大进步。但该书再把阿拉伯数字改回一、二、三、……,却又退回去了。

这里再抄录1897年的算学大考题中的两则:

① 今有式 $\frac{\text{天}\downarrow\text{三}}{\text{天}} = \frac{\text{天}}{\text{天}\downarrow\text{四}}$, 求天之同数。

$$\left(\frac{x}{x-3}\right) = \frac{x+4}{x}, \text{求 } x。$$

② 今有式 二天 \uparrow 三地 \downarrow 人=四五,
三天 \uparrow 三人 \downarrow 地=四二, 求天地人之同数。
四地 \uparrow 四人 \downarrow 天=五五,

$$\begin{cases} 2x+3y-z=45, \\ 3x+3z-y=42, \text{ 求 } x, y, z. \\ 4y+4z-x=55, \end{cases}$$

进入 20 世纪之后,官办的京师大学堂内,数学记号一仍旧制。教科书一律竖排,没有阿拉伯数字,更不要说白话文了。现华东师范大学图书馆藏有《普通新代数学教科书》一套,共 6 卷,日本上野清著,中国徐虎臣译。扉页上盖有“京师大学堂选用课本乙巳四月付印”15 个字组成的朱红大印。随手一翻,便见

$$\frac{\text{五}}{\text{丁二}} \text{丁} \frac{\text{三}}{\text{丙二}} \text{丙} \frac{\text{二七}}{\text{甲二乙二}} \quad (\text{实为今之 } \frac{d^2}{5} - \frac{c^2}{3} + \frac{a^2 b^2}{27}).$$

乙巳年即公历 1905 年,这一年爱因斯坦发表相对论,希尔伯特(Hilbert, 1862~1943)的 23 个问题也已发表了五个年头,拓扑学、泛函分析、微分几何、群表示论正在迅猛发展。然而这时的中国最高学府,还在使用这样套着沉重枷锁的数学公式,封建思想对人的束缚,由此可见一斑。

李善兰等创造的这套记号,有识之士早就认为没有必要。辛亥革命(1911 年)之后,终于废弃不用。从 1859 年《代微积拾级》出版算起,xyzw 取代天地人物的过程,前后竟经历了半个世纪之久。

第三节 中国最早的数学博士 ——胡明复与姜立夫

辛亥革命推翻了清王朝,一批知识分子积极寻求中国富强之路。在数学领域中,也出现了一些奋力追赶世界水平的青年。在中国近代科学发展史上,被后人称为“三胡”(胡敦复、胡

明复、胡刚复)之一的胡明复,成为获得博士学位的第一位中国数学家。

胡明复,江苏无锡人,1891年5月出生在江苏省桃源县(现为泗阳县)。童年时代的胡明复对于学习诗经八股文兴趣索然,一度中途辍学。14岁那年,胡明复考进了上海商业学校攻读商科,从那时起,他发愤读书,于是成绩上升很快,每次考试总是名列前茅。在上海商业学校毕业以后,胡明复又进了南京高等商业学堂。1910年春天,正当他即将毕业的时候,大哥胡敦复从北京带来了游美学务处(清华大学的前身)招考第二期留美官费生的消息,所谓官费生就是美国用“庚子赔款”供中国学生留美。这对胡明复来说是一个极大的鞭策。1910年初夏时分,经过紧张积极准备,胸有成竹的胡明复和堂兄胡宪生结伴赴京应考第二批“庚款”留美考试,结果两人都被录取了。

1910年初秋的一天,胡明复、胡宪生兄弟与赵元任、胡适等人一起登上横渡大洋的轮船,告别祖国,来到大洋彼岸的纽约州绮色佳(Ithaca)城,在那里的康奈尔大学学习。起初,胡明复和赵元任一起攻读数理课程。两年以后,胡适也从农学院转来。由于他们的勤奋努力,班上每次考试,第一、二名总是被胡明复和赵元任两人所囊括,而且每年的成绩在全校也是最好的。

胡明复虽然身在海外,但心向着祖国。他时刻关心着中国的前途和未来,关心着国内的政局,胡明复与赵元任等一群中国留学生商定成立中国科学社,发行月刊,定名《科学》。1915年1月,《科学》——中国历史上第一本综合性的现代科学普及杂志在美国的绮色佳城问世了。胡明复做了大量编辑整理工作。这份杂志以活泼的形式刊登自然科学各科的文章,甚至

语言学、经济学、军事学诸方面都有涉猎,题材广泛,印刷精美,使人耳目一新,很受广大留学生的欢迎。

1914年秋风送爽的时候,胡明复以优异的成绩从康奈尔大学毕业,获得学士学位,随即就进入哈佛大学研究院专攻数学。经过两年的努力,胡明复在高等分析课程上的研究逐步深入。1917年胡明复的博士论文《具有边界条件的线性微积分方程》通过答辩,著名的哈佛大学研究院授予胡明复哲学博士(Ph. D,即 Doctor of Philosophy,美国至今仍是向在自然科学上成就显著的博士研究生授予哲学博士),从而胡明复成为第一位获得博士学位的中国数学家。

在哈佛大学毕业后,胡明复回到祖国,一方面从事科学事业的组织工作,另一方面协助大哥胡敦复创办大同大学,胡明复主持数学系,弟弟胡刚复主持物理系。他不仅在大同大学任课,也去南洋公学(今上海交通大学)、南洋中学以及南京东南大学兼课。他教课极其认真,始终为广大师生所折服。

胡明复是一个很有远见的人,又是一个非常热情的人。在为《科学》杂志写稿时,他很注意向读者介绍各方面的新知识。他在《科学》头三卷发表的47篇文章中,有谈数学的4篇,物理8篇,化学2篇,生物医药6篇,天文气象4篇,教育5篇,军事3篇,由此也可以看出他知识的渊博。1923年,他参与了数学名词审定工作,把英、法、意、日、德诸文与中文译名对照,对推动当时和以后国内外数学的交流起了十分重要的作用。难能可贵的是,他十几年把全部心血用在中国科学社和大同大学上面,自己却很少留下作品来。

1927年6月12日,胡明复返回无锡家乡参加婶母的葬礼,傍晚时分,觉得天气闷热,便与堂兄胡宪生一起来到横河口游泳消暑,不料因为疲劳过度,奋力挣扎不起,沉入

水中……

1928年,胡明复的遗骨被安葬在杭州西湖岸边的一座小山上,面对着清秀美丽的西子湖。人们满足了他生前留下的遗言:一死于清流而为天下之乐。1931年,中国科学社的第一座建筑落成,命名为“明复图书馆”,即今上海陕西南路的卢湾区图书馆。

继胡明复之后,中国的第二个数学博士是姜立夫。

姜立夫(1890~1978),浙江平阳人。于1911年考取美国庚款第三批公费生,在加州大学伯克利分校学习一年后,转至哈佛大学。1918年他在库利治(J. L. Coolidge)教授指导下获博士学位,论文题目是“非欧的线—球变换几何”。他也是中国科学社的早期成员。

1919年南开大学成立,次年初,姜立夫就到南开大学任教,那时姜立夫是数学系唯一的台柱。他逐年根据学生情况轮流开设各门主要课程,例如,高等微积分,立体解析几何,射影几何,复变函数论,高等代数, n 维空间几何,微分几何,非欧几何等。正是由于他的博学多才,使南开大学能保证较高的教学质量。在这样的条件下,南开大学培育了一批我国数学界的卓越人才,如刘晋年、江泽涵、申又枨、陈省身、孙本旺、吴大任等。

抗日战争以前,姜立夫一直在南开大学任教。1934年到1936年,曾到德国汉堡大学访问考察。抗日战争期间,他任教于西南联合大学(由清华、北大、南开内迁合并),并在陈省身协助下主持数学研究所筹备处工作。

抗战胜利后,他被委任为当时的中央研究院数学研究所所长。1949年,姜立夫被迫把数学研究所的图书装箱运往台湾,随后自己一家也去了。不久,他又毅然决然地设法摆脱羁

绊,先个人后家属都回到祖国。1949年后,他年事已高,一直任教于中山大学。姜立夫是全国政协委员,对祖国的建设事业抱有很大的热情,1978年因病逝世,终年88岁。

姜立夫是一位辛勤的园丁。他的学生在回忆文章中说,听姜立夫先生上课真是一种少有的享受。他平日不善言谈,但讲课总是声音宏亮,字句清楚,要言不繁。他不写讲稿,往往只带着一页写有提纲的日历,讲起来却层次分明,论证严谨,说理透彻。对于课外作业他要求很严格,练习簿一律用小方格本,画图计算都方便,他的考试形式也多样,或写短文,或阅读文献写体会。

姜立夫十分重视数学文献的收集和保管。30年代,南开大学数学图书质量是全国少有的,世界上最重要的数学期刊都是完整的,著名数学家的论文集也比较齐备,还有许多珍贵的绝版书。

姜立夫写过不少数学论文,早在1916年,《科学》杂志2卷5期曾发表他的“形学歧义”一文,后来的论文有“圆素和球素的方阵理论”,译著有《黎曼几何学,正交标架法》等。

他的一生中,虽说没有重大的数学论著,但是却在中国现代数学发展史中占有重要的一页,永远为后人怀念。人们怀念他数十年如一日的献身精神,怀念他一丝不苟的治学态度和循循善诱的教学方法,更多的人怀念他谦虚谨慎、正直无私、与人为善、精诚待人的高尚品德。

第四节 陈建功与苏步青

陈建功(1893~1971)是中国现代数学史上一位十分重要的学者,浙江绍兴人。1913年从杭州高级师范毕业后,20岁的

陈建功怀着科学救国,富国强兵,振兴祖国科学的远大抱负,东渡日本留学。

到日本后不久,他就获得了当时中国政府给予工科学生的官费留学待遇,考入东京高等工业学校学习印染技术。为了满足对数学知识渴求的愿望,陈建功又考进了一所东京物理学校(夜校)在晚上学习数学。1919年学成回国后,在浙江甲种工业学校任教,同时利用业余时间钻研数学。

1920年,陈建功再次东渡日本来到仙台东北帝国大学数学系学习。大学一年级时,陈建功就在日本《东北数学杂志》上发表论文“关于无穷积的一些定理”。著名数学家苏步青曾这样评价这篇论文:“这是一篇具有重要意义的创造性著作,无论在时间上或在内容上,都标志着中国现代数学的兴起。”1924年回国后到武昌大学数学系任教授。

陈建功第三次东渡日本是在1926年,这次是到母校——东北帝国大学当研究生的。他开始在导师藤原松三郎指导下研究三角级数论,课题是研究富里埃级数的收敛与求和的问题,从理论上探索怎样可以将函数表达为三角级数。在两年多的时间里,陈建功高速度、高效率地工作着,先后取得了一系列达到国际先进水平的重要研究成果。发表在日本的几本数学杂志上。陈建功用日文撰写的《三角级数论》是当时函数论的一部十分重要的著作,其中不仅包括了当时的国际最新成就,也包括他自己的研究成果,书中创造的许多日文数学术语,至今仍被日本数学界沿用。

1929年,陈建功取得理学博士学位,成为第一位在日本取得这一荣誉的外国科学家。随后,他婉言谢绝了藤原教授的苦苦挽留,毅然回国,担任浙江大学数学系主任。他以严谨的态度治学,对学生的要求很严格,而且十分注重启发式的教学

方法。从 1931 年起,苏步青在陈建功的推荐下进入浙江大学并接替他的数学系主任职务。那时,陈建功在函数论方面,苏步青在微分几何方面,引导学生向纵深研究,在高年级学生和助教中举办数学讨论班。讨论班的教学方法是:每个学生先读懂一篇指定的最新发表的数学论文,要求他们领会作者思路,弄懂作者的研究方法,而后在讨论班上讲解。通过这种“赶鸭子上架”的方法使青年人受到严格的训练,培养他们独立工作和科研的能力,使浙江大学数学系培养出了一大批优秀人才。

1945 年抗战胜利后,他被邀去台湾大学担任校长兼教务长,次年仍回浙江大学任教并兼任中央研究院数学研究所研究员,后来曾赴美担任普林斯顿高级研究所的研究员一年。

从 1949 年起,到 1971 年逝世,陈建功先后在浙江大学、复旦大学、杭州大学任教,担任过杭州大学副校长、中国科学院数学物理学部委员、中国科学院数学研究所研究员、中国数学会副理事长、浙江省科学技术协会主席等职务。陈建功是中国函数论学科的奠基人,开拓了我国研究单叶函数论、复变函数逼近论以及拟似共形映照的三个方向。他的主要专著有《三角级数论》、《直交函数级数的和》、《实函数论》等,先后发表论文 69 篇。他一生中培养了数十名研究生,他的许多学生,如程民德、夏道行、越民义、龚升、徐瑞云、任福尧、谢庭蕃、王斯雷等,都是很有成就的数学家。

陈建功留给后人的,不仅是他的数学活动和数学著作,他的光彩照人的高尚品德,也为后人所称颂。他刚正不阿,坚持真理,坚持科学,不循私情,不求名利,提携后生,平易近人,留下了许多佳话。

苏步青是当代著名的数学家,也是很有作为的教育家。一部中国现代数学史,从 20 年代的奠基时期,到 80 年代的奋进

时期,都凝聚着苏步青辛勤的汗水,渗透着苏步青的心血。

1902年9月,苏步青出生在浙江省平阳县。当他在温州的浙江省第十中学读书时,就对数学产生了浓厚的兴趣,立下了科学救国的志向。那时,苏步青用20种方法证明三角形内角和为 180° 的定理,写成论文,送到浙江省学生作业展览会上去展出。他的勤奋好学博得了洪彦远校长的赏识,慨然出资200块大洋送他赴日本留学。

1919年,年仅17岁的苏步青在日本开始了12年之久的异乡留学生活,最初他报考东京高等工业学校,入学考试那天,他仅用1时就正确迅速地做完了原定3时做完的试题,令日本监考教师惊愕不已。1924年毕业后,又考入了日本东北帝国大学数学系,他入学考试的微积分和解析几何成绩都是满分。苏步青的第一篇论文“关于菲格德定理的注记”于1927年发表在《日本帝国学士院纪事》上。当时,学生的论文发表在学士院学报上的几乎没有,况且作者又是一位年轻的中国学生,在全校引起了很大的轰动,仅3年时间,苏步青就获得了理学士学位。

1927年大学毕业后,苏步青免试直升研究生。东北帝国大学林鹤一教授推荐苏步青为学校的兼任讲师,上高等代数课。1928年,他和松本教授的爱女松本未子结婚,1931年当他获得博士学位时,已经有41篇仿射微分几何和射影几何方面的研究论文发表在日本、美国、意大利的数学刊物上。

完成学业后,苏步青放弃了在日本当教授的机会,毅然举家返回,报效祖国。1931年,他来到陈建功任系主任的浙江大学数学系任教,随即陈建功便推荐苏步青继任数学系主任。从此,苏步青开始了几十年的教学生涯。他担任了4门课的教学,还和陈建功一起创办了数学讨论班。在1935年的中国数

学会成立大会上,苏步青被选为《中国数学会学报》主编。

抗战爆发,学报被迫停刊,学校也迁移到贵州湄潭的山沟里。无论在山洞里,还是在破庙中,苏步青带领他的学生们以非凡的毅力进行科学研究。数学讨论班不但没有停止,反而更加活跃了。当时的情景,许多学生至今回忆起来,还觉得获益非浅。

抗战胜利后的 1946 年,浙江大学迁回杭州。当时全国各地学生运动风起云涌,苏步青接受了进步思想的影响,积极参加一些爱国活动。苏步青曾任浙江大学教授会主席,后来又出任校训导长。他利用自己的合法身份声援学生运动,并设法营救被反动当局逮捕的学生,受到进步学生的支持和赞许。1949 年春节,苏步青收到一张贺年卡,拆开一看,上面写着:恭贺新喜——毛泽东。这使处于黎明前黑暗之中的苏步青看到了胜利的曙光。

1949 年后,苏步青更以全副精力投进了祖国的建设中。1952 年院系调整时,他和陈建功等一起调至复旦大学,先后任教务长、副校长、校长等职。繁忙的社会活动并没有影响苏步青的科研工作,整个 50 年代是他数学生涯中最有活力的时期。

粉碎“四人帮”后,他出任复旦大学校长,锐意改革,立下“不出人才誓不休”的壮志。在他任校长的几年中,复旦大学科研硕果累累,成绩卓著,在国内外都树立了“复旦”的声誉。

苏步青已发表论文 168 篇,还出版了多部专著:《射影曲线概论》(1954)、《一般空间微分几何》(1958)、《射影曲面概论》(1964)、《射影共轭网概论》(1978)、《仿射微分几何》(1983)、《计算几何》(与刘鼎元合著,1981)等。1983 年,由中美两家出版社联合出版了英文版的《苏步青数学论文选集》。

这些工作,已形成微分几何领域中一个方面的中国学派。

苏步青在科学业绩上成绩斐然,在培养人才和数学教育方面的贡献同样令人称道。他的许多学生,如谷超豪、胡和生、张素诚、白正国、吴祖基、熊全治等,都是国内外知名的学者。他极力提倡恢复举办数学竞赛,多次在复旦大学举办全国性的“数学竞赛集训班”,以选拔培养年轻的数学人才。他热情关心中学数学教学改革,亲自主编过中学数学教材。更难能可贵的是,他身体力行,主动参与中学教师的培训。1984年和1985年间,苏步青为上海的中学教师开设了两个系列数学讲座,各有十讲。他制作挂图,手写板书,清晰工整,并以居高临下之势,将初等数学问题阐明得精当透彻。他的这种精神,真可谓为教育事业“鞠躬尽瘁,死而后已”了。

苏步青晚年不仅仍担任多种学术职务,如中国科学院学部委员、中国数学会名誉理事长、复旦大学名誉校长等,还积极参与政务。1988年4月,他被选为全国政协副主席,1993年又以91岁高龄获选连任。

为了表彰苏步青为中日文化学术交流所做的贡献,日本天皇授予他“勋二等瑞宝章”,日本驻沪领事于1993年6月3日主持了授勋仪式。

第五节 传奇数学家华罗庚

在中国,有一位数学家是家喻户晓的,这就是华罗庚,人们往往把这个名字当作“数学家”、“自学成才”和“聪明”的代名词。随着“华罗庚金杯”少年数学邀请赛的广泛开展,这位当代中国的传奇数学家在少年儿童中也广为知晓了。

华罗庚于1910年11月12日出生在江苏省金坛县。1924

年从金坛中学初中毕业后,因家境贫寒,年仅 14 岁的华罗庚便在父亲经营的小杂货铺里当伙计。他的中学老师王维克很欣赏他的数学才华,鼓励他继续自学数学。19 岁那年,华罗庚突然染上伤寒,此后在腿部留下了残疾。

在病痛和贫困面前,华罗庚没有失望,反而更加迷恋数学,他四处寻找数学书自修。在那个小镇上只有三本数学书可用,一本代数、一本几何以及一本 50 页的微积分。他贪婪地把它们读得烂透,并尝试写些论文,投寄到《科学》、《学艺》等刊物发表。1929 年华罗庚发表了他的第一篇论文“Sturm 氏定理之研究”(《科学》第 14 卷第 4 期)。1930 年 12 月他又在《科学》第 15 卷第 2 期上发表了《苏家驹之代数的五次方程解法不能成立之理由》,文中指出,苏家驹的解法中把一个 12 阶行列式算错了。

这后一篇论文引起了清华大学数学系的重视,系主任熊庆来是“慧眼识英雄”的伯乐。1931 年,华罗庚经他的同乡唐培经教员引荐,被破例录用为清华大学数学系的图书管理员,这为他的学习创造了有利条件。不到一年半的光景,华罗庚旁听了数学系的全部课程,打下了坚实的现代数学基础。在杨武之教授(杨振宁之父)指导下,两年之中,华罗庚写出了一批很有质量的数论论文。凭藉他的天赋和雄厚的学力,1933 年,华罗庚被清华大学破格聘为助教。一个乡间来的青年人,只有初中文凭,居然能登上中国最高学府的讲台,这简直是一个奇迹。

1934~1936 年,华罗庚在杨武之等教授的关心下,深入研究数论,他阅读了许多当时国际上数论权威的著作,写出了 20 余篇高质量的论文,多数发表在国外的数学杂志上。1935~1936 年,美国数学家维纳(N. Wiener)和法国数学家阿达

玛(J. Hadamard)相继来华讲学,华罗庚认真地听了他们的讲课。维纳对华罗庚尤为器重,把华罗庚推荐给当时世界最负盛名的数学家之一——英国的哈代(G. Hardy)。并由中华文化教育基金会资助去剑桥大学专攻解析数论。1936年,年仅26岁的华罗庚离别家中的妻子与三个孩子,作为访问学者来到英国,初步领略到这个世界数学中心的学术生活。刚到剑桥时,哈代就预言,“华在两年内可望得到学位”。数论是剑桥大学的强项。在剑桥的两年中,华罗庚发表了10多篇数论方面的论文,每一篇都可作为博士学位论文。但因为学费昂贵,他始终未正式注册读学位。直到1980年,华罗庚才在法国南锡大学第一次接受荣誉博士学位。后来又获香港中文大学(1983年)、美国伊利诺斯大学(1984年)荣誉博士学位。

1938年,华罗庚风尘仆仆回到祖国,在昆明的西南联大任教,由于数学系主任杨武之的提携,华罗庚从教员越过讲师、副教授,直升为正教授。抗战期间,生活非常困苦,华罗庚来到西南联大时,连一间房子也难找,还是著名诗人闻一多将住所腾出一间房子让华罗庚一家六口居住。两位文化名人住在仅有一帘之隔的两间陋室里,他们之间建立了笃深的友谊。1944年,闻一多在昆明街头挂起“闻一多治印”的招牌,以刻印贴补生计,可见当时教授生活清苦之一斑。

1946年2月到5月,华罗庚应苏联科学院和对外文化协会邀请,到苏联作学术访问,会见了维诺格拉朵夫和林尼克等著名学者。1946年秋,华罗庚远渡重洋,来到世界最著名的数学中心——普林斯顿高级研究所工作,随即又被聘为伊利诺斯大学教授。在这段时间内,华罗庚除研究数论之外,还涉足“有限域上的方程论”、“典型群”、“域论”等学科,硕果累累。

1950年,华罗庚毅然放弃了在美国优越的工作条件和优

厚的生活待遇,举家返回祖国,从此便将全副精力投身于祖国建设。首先重组中国数学会,筹建中国科学院数学研究所,分别担任了理事长和所长职务,把工作的重点转到培养青年数学家与发展中国数学事业上来。在数学所的工作中,他组建了多个学科的研究室,撰写了《数论导引》、《典型群》(与万哲先合作)和《多复变函数论典型域上的调和分析》等著作,带领青年人开创新的研究领域,并亲自给他们讲课,指导他们修改论文和论著。1958年,中国科技大学创办后,他先后担任了数学系主任、副校长,并写了《高等数学引论》第一卷、《从单位圆谈起》等著作,为培养青年人呕心沥血。

从1965年开始,华罗庚将工作重心放到数学在工农业生产的普及方面。他选择了以改进工艺为主的“优选法”和以改善组织管理为目的的“统筹法”,并加以普及。他撰写的以这两种方法为内容的小册子,深入浅出,普通工人也能读懂。他还身体力行,几乎跑遍全国加以宣讲。这在中外数学界可说绝无仅有,无怪乎在1980年的国际数学教育会议上,华罗庚所做的大会报告“在中华人民共和国普及数学方法的若干个人体会”赢得了与会人士最热烈的掌声。

华罗庚曾写过不少文章向青年人传授治学经验和学习方法,他提出“聪明在于积累,天才在于勤奋”,勉励青年人勤奋学习、工作。他把读书学习和打好基础形象地概括为“由薄到厚”和“由厚到薄”的过程。“由薄到厚”是学习、接受的过程,即读书过程中加上了自己的理解和体会,书就越读越“厚”了。“由厚到薄”是消化、提炼的过程,即把所学的东西经过咀嚼、消化、融会贯通,提炼出关键性的问题,掌握其精神实质,这样书又变得越来越“薄”了。

华罗庚十分关心和支持数学教育事业。50年代初,他亲

自主持编写了我国第一套中学数学教材。华罗庚热心倡导在中学开展数学竞赛活动。从1956年至1979年,他多次担任北京市和全国中学数学竞赛委员会主任并亲自主持命题、监考、阅卷和评奖等工作。特别是竞赛前,他常亲自给学生作报告,并将报告内容整理出版了几本通俗读物,如《从杨辉三角谈起》、《从祖冲之的圆周率谈起》、《从孙子的神奇妙算谈起》、《数学归纳法》等。不仅向中学生传授数学知识,还对他们进行爱国主义教育。

华罗庚是享有国际盛誉的数学家,对现代数学作出了重大贡献。他一生共发表论文约200篇,专著10本,其中有8本被国外翻译出版,有些可列入本世纪经典著作之列。另外他还撰写了10余部科普作品。1983年,世界最著名的科学著作出版社——德国的斯普林格出版社出版了《华罗庚论文选集》。1984年上海教育出版社又出版了《华罗庚科普著作选集》。他曾任全国人大常委会委员,第六届全国政协副主席,中国科学院学部委员、副院长,中国数学会理事长和名誉理事长。他还被选为美国科学院的国外院士(1982年),第三世界科学院的院士(1983年)以及德国巴伐利亚州科学院院士(1985年)。

华罗庚把一生都献给了数学事业,1985年,74岁高龄的华罗庚东渡日本,6月12日当他正在做学术报告讲完最后一句话的时候,心脏病突发。当晚22时,这位中国最杰出的数学家、著名的社会活动家永远离开了我们。华罗庚实现了他自己“鞠躬尽瘁而已”的誓言,在科学讲坛上光荣地奋斗到生命的最后一刻。

脱颖而出,饮誉海外,培养青年,造福祖国,这就是这位传奇式数学家所走的道路。他的精神将永远激励后人去攀登科学高峰!

谈到华罗庚的成长道路,不能不提到提携他步入数学殿堂的伯乐——熊庆来。

熊庆来,1893年出生于云南省弥勒县。1913年,熊庆来参加云南省选拔欧美留学生考试,在数百名考生中名列第三,被派往比利时留学。次年,第一次世界大战爆发,比利时沦陷,熊庆来辗转荷兰、英国,到达法国。在法国7年间,他先后在中学和多所大学攻读数学、力学、天文学等许多学科,最后以优异的成绩取得了理科硕士学位。

1921年回国,去东南大学(今南京大学)创办数学系,担任教授和系主任。他先后编写了10多本数学讲义,其中有几本被商务印书馆选入大学丛书,广为流传。1926年,熊庆来应聘任清华大学算学系教授,后来又接替郑桐荪任算学系主任。在他的主持和带领下,清华大学算学系很快就成为国内数学教学和研究的中心。当时清华算学系的教授有熊庆来、郑桐荪、杨武之、孙光远4人,而陈省身、吴大任则是国内最早的数学研究生。

1931年,熊庆来启程赴欧考察,并准备代表中国第一次出席在瑞士苏黎士召开的国际数学会的会议。这样,他又来到阔别10年的巴黎,在著名的庞加莱(Poincaré)数学研究所工作。1933年,熊庆来写出了题为“关于整函数与无穷级的亚纯函数”的论文,他的成果被欧洲数学界誉为“熊氏无穷级理论”。熊庆来也因此被授于法国国家博士学位。

熊庆来回国后,仍任清华大学算学系主任,更加重视培养人才。1937年抗战前夕,他回到故乡,出任云南大学校长。他苦心经营云南大学达12年之久,广邀著名学者来校任教,使云南大学教学质量大为提高。1949年9月,正值熊庆来赴巴黎参加联合国教科文组织第四届大会之时,云南大学被当局

宣布解散。会后他已无校可归,只好暂留巴黎,以做家庭教师为生,课余仍常到庞加莱研究所去钻研数学。1950年春天,他突患中风,致使半身不遂,经医治后右手仍留下残疾。但他没有因此气馁,把全部精力投入了函数论的研究,以惊人的毅力用左手写下了几十篇论文。

中国政府和人民十分关心这位数学界的先驱者。周恩来曾两度写信邀请熊庆来回国工作。1957年6月,熊庆来回国定居,在华罗庚的支持下,任数学研究所研究员,负责函数论研究室。1963年,熊庆来已届70高龄,他还录取了杨乐、张广厚两名北京大学数学系的毕业生为研究生。后来,杨乐、张广厚在函数论方面取得了具有国际先进水平的成就。

熊庆来先生为中国现代数学事业的兴起做出了毕生的贡献。他的爱国精神,他对人才的关心、爱护和培养,永远激励着后人。1992年6月,熊庆来的雕像在昆明云南大学落成,并为熊庆来的百年诞辰举行了纪念活动。

第六节 几何大师陈省身

陈省身是浙江嘉兴人,辛亥革命那年(1911年)出生。他15岁时就进了南开大学数学系,那时主要是姜立夫在授课。1930年南开毕业时,陈省身被几何学所吸引,考取清华大学的研究生,导师是孙光远(芝加哥大学博士),专攻射影微分几何)。1934年夏取得硕士学位。随后,陈省身获得了中华文化教育基金会的奖学金,去德国汉堡跟从著名几何学家布拉希开(Blaschke, 1885~1962)学几何,于1936年2月获得汉堡大学科学博士学位。这时奖学金还没用完,于是又转去巴黎跟嘉当(E. Cartan, 1869~1951)研究微分几何。嘉当领导着当

时整个微分几何的潮流,他的工作很少有人能懂,被称作是“超越时代的”。在两位大师的熏陶下,陈省身迅即达到微分几何研究的前沿,成果累累。

抗日战争爆发后,陈省身应聘为清华大学教授,后随学校内迁至昆明。陈省身在西南联合大学讲授保形微分几何,并与物理系的王竹溪、数学系的华罗庚一起举办李群讨论班。那时的学生有王宪钟、严志达、吴光磊、杨振宁、钟开莱等。

1943年,第二次世界大战正酣,陈省身应美国数学界领袖维布伦(O. Veblen, 1880~1960)之邀,到普林斯顿高级研究所工作。此后两年间,他完成了一生中最重要的工作:证明高维的高斯——邦内(Gauss—Bonnet)公式,构造了现今普遍使用的陈示性类,为整体微分几何奠定了基础。

二次大战结束后,陈省身回到上海,主持中央研究院数学研究所的工作。他从当时大学刚毕业不久的青年人当中,选拔一些优秀分子来所工作。为了使这批年轻人迅速赶上国际水平,陈省身决心把研究所办成研究生院。他选择当时在纯粹数学领域中起关键作用的代数拓扑学作为人人必读的基础,以便由此踏上追赶国际先进水平的台阶。陈省身是唯一的导师,每周上12小时的拓扑学(拓扑译名就是那时起的)。他戏称拓扑学(Topology)为“托钵”,即搞数学都要像和尚一样“托钵化缘”、“潜心苦修”。当时先后在所里的青年人有吴文俊、廖山涛、陈国才、孙以丰、杨忠道、马良、林竞、周毓麟、叶彦谦、曹锡华、路见可、张素诚、朱德祥、陈杰、陈德璜等约20人。后来,这批人都成为中国数学界的中坚。

1949年初,中央研究院被迫迁往台湾,陈省身举家迁往美国。1949年夏,陈省身在芝加哥大学接替了E. P. Lane的教授职位(E. P. Lane正是陈省身的导师孙光远当年在美留

学时的导师)。1960年陈省身接受了加利福尼亚大学伯克利分校之聘,一直到1980年退休为止。

陈省身最重要的贡献是认识到嘉当的联络的几何学思想与纤维丛理论有密切的关系,从而把微分几何推进到大范围的情形。他发现的示性类——除他自己以外都称之为“陈类”——其影响遍及整个数学领域。进一步,纤维丛理论竟成为物理学中规范场理论的数学工具。纯粹数学和物理学如此协调,再次说明了“科学发展的整体性”。由于上述的工作,陈省身成为创立现代微分几何的大家。当代大数学家 A. Weil 曾说“我相信未来的微分几何史一定会认为他是嘉当的继承人”。1985年,人们把他称为“当代还活着的最伟大的几何学家”。

陈省身获得了许多科学荣誉。早在1961年就被选为美国国家科学院院士。1970年,他获得美国数学会颁发的 Chauvenet 奖。1976年得到美国国家科学奖章,这是美国在科学、数学、工程方面的最高奖。此外,他还得到美国数学会颁给的 Steele 奖(1983)。当然,他最高的荣誉是获得当代数学的最高奖之一——Wolf 奖,这个奖是以色列颁发的,奖金每人5万美元。Wolf 奖的得奖人都是世界上最负盛名的数学家。

陈省身的学生很多,由他指导的博士就有41人。其中最著名的是丘成桐,他获得1982年的菲尔兹(Fields)奖,这是世界数学的另一个最高奖,每4年一次,由国际数学家会议颁发,颁奖对象是40岁以下的青年数学家(Wolf 奖则和诺贝尔奖一样是看一个人终生工作的)。丘成桐,1949年在广东汕头出世,不久移居香港,在香港中文大学毕业,以后即到美国在陈省身指导下进行微分几何的研究,1971年获加州大学(伯克利)的博士(Ph. D)学位。博士论文的题目是“非正曲率紧流

形的基本群”。他被评为加州 1979 年最优秀科学家,获 1981 年度美国数学会奖及 1981 年度美国科学院奖。丘成桐获得菲尔兹奖的工作主要有:证明 Calabi 猜想和正质量猜想,高维闵可夫斯基问题的解决,以及三维拓扑学和极小曲面等问题。

丘成桐曾是普林斯顿高级研究所的终身教授,后来在加州大学(圣地亚哥)任教授。1987 年到哈佛大学任教授至今。1993 年被选为美国国家科学院院士。除菲尔兹奖外,他还获 Veblen 奖(1981 年),美国国家科学院的 Certy 奖(1981 年)。他多次回国讲学,为发展中国数学事业做了许多工作。

由于陈省身的影响,华裔学者在微分几何与相邻学科方面有许多很好的工作,其中有肖荫堂、郑绍远、项武义、项武忠、伍鸿熙等。郑绍远 1974 年由陈省身指导获加州大学博士学位。更早些,廖山涛是陈省身在芝加哥大学指导的博士(1955 年)。也曾是陈省身的学生杨振宁曾提出规范场方程(杨—米尔斯方程),后来发现它和数学上的纤维丛、陈类有关,杨振宁有诗赞曰:“造化爱几何,四力纤维能,千古寸心事,欧高黎嘉陈”(最后一句指欧几里得、高斯、黎曼、嘉当、陈省身)。

陈省身晚年的一项重要贡献是筹建了美国国家的数学研究所(Mathematical Sciences Research Institute)。这个所的建立是为了不要把最优秀的人才都集中在普林斯顿一地,故由国家拨款再成立一个高质量的纯粹数学研究中心。经过多方角逐,最后决定由陈省身在加州大学伯克利分校筹建。1981 年建成,由陈省身出任第一任所长(1981~1984)。

陈省身 1972 年开始回国访问讲学,1980 年开始主持每年一度的国际双微会议(微分方程和微分几何),1985 年是第六次(DD₆)。他组织研究生的暑期培训中心,帮助青年人提高

国内数学的现代化水平。近几年来,选拔了 20 名学生去美国留学(即“陈省身”项目)。1985~1987 年,中国数学会常务理事会通过设立陈省身数学奖。由香港亿利达工业发展集团有限公司提供资金(每年 1 万元)。奖励中青年数学工作者所取得的成就。1984 年,当时的教育部聘请陈省身担任南开大学数学研究所所长。在陈省身主持下,1985 年是偏微分方程年,1986 年是微分几何年,…1992 年是复分析年,1993 年则是计算数学年,…这些活动必将有力地推动中国数学现代化的进程。

1985 年 6 月,陈省身接受了华东师范大学名誉教授的聘书,同时为《数学教学》杂志题词:“21 世纪的数学大国”,从这里可以看出这位大数学家对发展我国数学事业的殷切期望。他说,数学大国是指能独立地开展数学研究,能在平等的基础上与国外的同行进行交流,并不是要把别人都压倒。

1988 年,在陈省身建议下,在国内召开了“21 世纪数学展望”的大型讨论会,国内外专家齐聚南开,共商大计,在这会上和会后,国家领导部门接受陈省身的建议,支持全国数学界“率先赶上国际先进水平”的决心,同意设立“天元”数学基金,支持数学重点项目的发展,很快收到了效果。1991 年召开第二次“21 世纪数学展望”会议,数学研究和势头很好,进展神速。

陈省身为中国现代数学的发展可谓殚精竭虑,一往情深。我们可以期待“21 世纪数学大国”的愿望一定会实现。

第七节 第一流的统计学家许宝騄

1949 年以前中国的数学研究,大多集中在纯粹数学领

域。应用数学方面,例如概率论与数理统计等,则由于工农业生产的落后,难以在中国扎根生长,从事研究的人员比较少。但是,有一位中国人在 20 世纪数理统计史上享有盛名,这就是许宝騄。

许宝騄(1910~1970),祖籍浙江杭州,生于北京,他是北京大学一级教授,中国科学院学部委员。

许宝騄最初是攻读化学的,1928~1930 年就读于燕京大学化学系。1930 年入清华大学改学数学。毕业后在北京大学数学系当了两年助教。1936 年考取公费留学英国,在伦敦大学、剑桥大学学习,后来兼任讲师。1938 年取得哲学博士。1940 年又获科学博士学位。同年,回到抗战烽火中的祖国,在昆明的西南联大任教。1945 年他再次出国,在美国加州大学伯克利分校、哥伦比亚大学和北卡罗林那大学任教。1947 年 10 月。回到北京,此后一直在北京大学,直至去世。

许宝騄的科学研究生涯是在伦敦开始的。30 年代统计学的中心在英国。皮尔逊(E. S. Pearson)以及费歇尔(Fisher)都是一代权威。许宝騄当然向他们学习并深受他们的影响,特别是费歇尔的影响。然而,当时英国统计学派的研究在数学论证方面有不少欠缺,许宝騄以其扎实的数学基本功夫,给出许多统计规律的极其漂亮和严密的证明。他最初的两篇统计学论文发表在《统计研究报告》第二卷上。许宝騄完成这些重要工作时,还不满 30 岁。

抗日战争时期,许宝騄克服了战时困难,钻在山洞里继续进行着世界第一流的研究工作,他的学生有钟开莱、冷生明、王寿仁等。钟开莱后来去美国,是当今数理统计方面的名家。许宝騄从 1938 年到 1945 年的论文,处在多元分析数学理论发展的前沿。他是一位有高度数学素养的数学家,不仅扩展了

矩阵论在统计理论中的作用,而且证明了矩阵论中的一些新定理。在后人对这些工作的评论中,经常使用这样的语句:“许的证明,基于代数和分析,是特别优美的”;“许的一般处理需要高度的数学才能和数学技巧”;“许坚持深入浅出……默默地投身于学术的最高目标和水准”。许宝騄的论文非常深刻,这是世所公认的。

1947年,许宝騄谢绝著名统计学家瓦尔德(A. Wald)等为他安排的极好的职位,回到了祖国。直到1949年,美国大学对他的邀请仍然有效,但他坚决留在北京。1950年久病初愈,立即招收研究生,举办概率论的专题讨论班。1951年再次病倒住院,组织上安排他出国疗养,他一再谢绝,坚持工作。1956年,他在住所挂起黑板,带病主持讨论班。60年代初,他每次上课只能在黑板前站立45分,仍然坚持教学。在“十年动乱”这一非常年代,他身患重病又得不到安宁,仍未放弃工作。1970年他去世前一个多月,完成了关于试验设计与代数编码理论间联系的论文。他逝世后的第二天,人们在他的床前,还看到一叠叠的算稿。许宝騄由于长期患肺病,终身未婚,有几次他几乎要结婚了,都因病而作罢。可是,他以超人的毅力从事科学研究。在多元分析、统计推断和线性模型方面做出国际水平的工作。尤其在多元分析方面的贡献,起了奠基性的作用。他为祖国争取了荣誉,给后世树立了为科学献身的楷模。

许宝騄还为祖国的数理统计学科培养了一支重要力量。1956年,周恩来总理主持制定的我国第一个科学规划中,数理统计是数学方面的重点子学科之一。这一年,根据教育部的安排,全国有40多人到北京大学参加数理统计的学习和研究,许宝騄亲自执教,对改变我国这一领域几乎空白的状况起到重大作用。他还亲自指导了北京大学五届概率论专门化的

学生,现在这支队伍正是我国数理统计队伍的中坚力量。

许宝騄在数学特别是概率论与数理统计方面的贡献,赢得了国际数学界的赞誉和尊敬。1979年,在他逝世10周年前夕,美国《数理统计年鉴》曾邀请一些著名学者、他的同事和学生撰文介绍他的生平和工作,高度评价他的贡献。1980年,国内举办许宝騄诞辰70周年的纪念活动,出版《许宝騄论文集》,江泽涵、段学复等撰写了纪念文章。在实现四个现代化的进程中,人们将会越来越感到数理统计学的重要,也会更加怀念许宝騄。

1984年,钟开莱、郑清水、徐利治发起设立“许宝騄统计数学奖”。由中外学者组成评审委员会,每年评奖一次。奖励35岁以下的研究概率论与数理统计的青年工作者。首次许宝騄统计数学奖由华东师范大学的郑伟安获得,获奖论文题目是“黎曼流形上鞅的收敛性”。

第八节 吴文俊和机器证明

吴文俊(1919~)是我国当代的著名数学家。1940年毕业于上海交通大学。1945年他进入中央研究院数学研究所,由陈省身加以指导,学习拓扑学。1947年,他根据中法互换留学生的协定,带着简便的行装,来到法国的斯特拉斯堡深造。到法国后,他曾参加嘉当领导的讨论班。嘉当是当时的数学权威,他主持的讨论班被认为是推动数学发展的源泉之一。在法整整四年,他在爱勒斯曼(Ehresmann)和嘉当指导下,获得了法国国家博士学位。1951年,他回到祖国。

吴文俊在拓扑学方面的成就集中在“复形在欧氏空间中的实现问题”上,这是拓扑学发展中的一个重要课题,自30年

代以来一直没有出色的结果。吴文俊利用一种拓扑性质——示嵌类,结合近代拓扑学发展,提供了解决这类问题的一条途径。吴(文俊)类(Wu Class)已是拓扑工作者的常识,写入教科书和词典。1956年,新中国第一次评选国家自然科学奖,吴文俊以“示性类和示嵌类”的研究荣获一等奖。1956年,吴文俊应邀参加全苏第三届数学大会。

吴文俊把拓扑学知识用于无线电工程的线路板设计问题,取得了良好的效果。70年代以来,吴文俊研究计算机证明的问题,他所提出的机械化方法,国外称之为“吴方法”。它可以由开普勒定理发现牛顿定律,导出洪加威的“几何定理”例证法,以及进行代数和几何问题的机器证明,被认为是机器证明的里程碑式的贡献。

传统的欧氏几何证明定理的方法要求对个别的定理寻求个别的证法,而且每一证明总是要求某种新的、往往是奇巧的想法。吴文俊研究的几何定理的机器证明旨在寻求一般性的方法,它不仅适用于个别的定理,而且适用于整个某一类型的定理,甚至可以说是某一种几何的所有定理。只要依照他所述的方法机械地进行,在有限步之后,就可对整个一类定理得到统一的证真或证伪,而无分难易。要做到这一点,必须通过以数量关系为主的代数方法,而几何的代数化乃是关键性的一步。

希尔伯特曾经给出关于几何定理证明机械化的具体成果。他的方法主要在于通过有关公理引进由几何所确定的数系统。这一过程可以称为几何的代数化。通过这种直线上的点与数系统的数之间的对应关系可以引进坐标。这样,几何定理就变为代数关系式之间的定理。这些关系式或者是坐标间的多项式等式,或者是多项式不等式。代数关系式间的定理证

明的机械化问题表达起来比较明确,但证明起来也不一定容易。首先,由于解决这些代数问题的计算量往往过大,使人望而却步;其次因为代表几何关系而出现的那些代数关系式往往杂乱无章,使人无所措手。现在,由于计算机的出现,对繁杂的计算已经有了有效的处理办法。因此,如何把杂乱无章的代数关系式整理得井然有序,使计算机得以发挥其威力,便成为整个问题的关键所在。

至此,几何定理的机器证明问题可以分成下面三个主要步骤:

第一步,从几何的公理系统出发,引进数系统与坐标系统,使任意几何定理的证明问题成为纯代数问题。

第二步,将几何定理假设部分的代数关系式进行整理,然后依确定步骤验证定理终结部分的代数关系式是否可以从假设部分已整理成序的代数关系式中推出。

第三步,依据第二步中的确定步骤编成程序,并在计算机上实施,以得出定理是否成立的最后结论。

第一步称为几何的代数化与坐标化,第二步为几何的机械化,至于第三步能否使用计算机作最后验证,完全依赖于第二步机械化之是否可能。如果一门几何可以找到这样三步(事实上只要前面两步即可)来完成定理的证明,就说这门几何可以机械化,并把可以机械化的这一结论称为机械化定理。

并不是每一种几何或任意一类定理都能找到机械化的证法。对于确实可以进行机械化证明的初等几何定理,吴文俊提出三种不同的类型。每一种类型都假定第一步的代数化与坐标化已经完成,而且可以把几何定理的证明问题化为一些代数关系式的处理问题。第一种类型定理的特征是假设部分的代数关系式对于某些特定变量都必须是线性的。这类定理包

括所谓一类构造型的纯交点定理,其证明的机械化方法已由希尔伯特得出。第二种类型定理的特征是假设与终结部分的代数关系式都可以多项式的方程来表示。这种类型定理的机械化证明方法由吴文俊本人于1979年提出,并在多种计算机上实施过。第三种类型定理的特征是假设与终结部分可以是任意的多项式或不等式,但其系数必须在一实闭域中,因而原来的几何必须有次序关系。这种类型定理的机械化证法已由塔斯基(Tarski)在1950年给出。

吴文俊不仅论述了初等几何机械化的原理与方法,还研究了这些理论与方法在计算机上的具体实施,其中包括程序的编制,计算量的估计,具体定理的证明,新定理的发明以及几何的理论和方法对计算机使用效率的改进与各种应用等等。后来,他还致力于研究微分几何的机械化问题以及各种有关的理论问题。

吴文俊关于机器证明的成果已引起国内外逻辑学家和人工智能学者的高度重视。此外,他还致力于中国古代数学史的研究。由于吴文俊的杰出贡献,他一直是中国科学院的学部委员。1983年,吴文俊当选为中国数学会理事长,这是继华罗庚之后的第二任理事长。

国内拓扑学研究的创始人,当推北京大学教授江泽涵。他1902年生于安徽省旌德县江村,1926年毕业于南开大学数学系,1927年赴美国留学,在哈佛大学数学系做研究生,1930年以论文“三变量调和函数的临界点的存在性”获博士学位。此后,他任普林斯顿大学数学系助教,专长拓扑学,1931年回国后,一直在北京大学任教授,从1932~1952年的20年中,江泽涵一直担任北京大学数学系主任。1949年后,江泽涵任中国科学院学部委员,中国数学学会副理事长,北京市数学会理

事长。

江泽涵早期的论文“关于非退化牛顿势的临界点”以及“三维区域上格林函数临界点的存在性”，先后发表在1932年的《美国数学杂志》上。1936年，在《中国数学杂志》创刊号上有江泽涵的论文“能定向的二维闭流形群”。这些当是我国最早的拓扑学研究论文。

江泽涵后来的主要科学工作是在不动点类理论方面。从50年代后期起，他和他指导的研究生从尼尔森(Nielson)数的估计开始，打破了不动点类理论停滞多年的僵局，开辟了新的途径，取得了十分系统的成果。这些工作被国外评论为一个中国学派所做的改进。1979年出版的《不动点类理论》总结了这方面的科学研究成果。

第九节 哥德巴赫猜想在中国

正当20世纪来临之际，第二届国际数学家大会于1900年8月在巴黎召开。会上，著名德国数学家希尔伯特发表了重要演说，提出了23个急需解决的重大数学问题。这些问题始终吸引着大批极有才华的数学家为之奋斗。一个数学家如果能在某一问题上取得一定的进展，就对现代数学作出了重要贡献。“哥德巴赫猜想”是希尔伯特第8问题中的一部分。在华罗庚和闵嗣鹤的带领下，陈景润、王元、潘承洞等人在哥德巴赫猜想研究上取得了一系列令人瞩目的成就，目前在世界上仍处于领先地位。

哥德巴赫(C. Goldbach)是德国数学家，他在1742年给大数学家欧拉的信中叙述了关于把正整数表示成奇素数之和的两个猜想。对他的语言略加修改后，这两个猜想可表示为：

命题 A: 每一个大于或等于 6 的偶数都可表示成两个奇素数之和。

命题 B: 每一个大于或等于 9 的奇数都可表示成三个奇素数之和。

其中, 命题 A 就是通常所说的哥德巴赫猜想, 命题 B 可称为奇数的哥德巴赫猜想。显然, 命题 B 是命题 A 的推论。事实上, 若命题 A 成立, 设 n 是任一大于或等于 9 的奇数, 则 $n-3$ 是大于或等于 6 的偶数, 据命题 A, $n-3$ 可表示成两个奇素数之和, 所以 n 可表示成 3 个奇素数之和, 于是命题 B 成立。

在给哥德巴赫的复信中, 欧拉说他虽然不能证明这两个猜想, 但深信它们是对的。

起初, 人们试图通过具体数字来验证哥德巴赫猜想, 许多人为此花费了大量的甚至毕生的精力。例如, 尹定曾验证到 5 亿以内的偶数, 命题 A 的结论是正确的。如果能找到一个反例, 就可以推翻这个猜想; 但如果猜想成立, 用验证的方法来确立其正确性是行不通的。

哥德巴赫猜想的内容十分简洁明显, 但它的证明却异乎寻常地困难, 以致于希尔伯特把它列为 20 世纪要解决的重大问题之一。在 1912 年的第三届国际数学家大会上, 数论大师兰道 (E. Landau) 在演说中把哥德巴赫猜想列为数论中当时的科学水平不能解决的四个问题之一。1921 年, 数论泰斗哈代在哥本哈根数学会的演讲中宣称它的困难程度“是可以与数学中任何未解决的问题相比拟的”。

然而, 无数数学家还是前赴后继地向这个固若金汤的哥德巴赫堡垒发起了强大的攻势, 层层密集的防线被一道道突破, 进攻的方向主要沿着两条路线前进, 其基本做法都是把哥

德巴赫猜想改为较弱的命题,即将结论中的要求放宽。

第一条路线是兰道所开辟的,就是要证明:“存在这样的正数 c , 使每一个大于或等于 2 的整数,都可以表示为不超过 c 个素数之和”(简称命题 C)。

在这条路线上的第一次重大突破是于 1930 年由 25 岁的苏联数学家西涅日尔曼取得的,他证明了兰道预言当时的数学家力所不能及的命题 C,并估算出这个数 c 不会超过 $s \leq 800000$ 。人们称 s 为西涅日尔曼常数。

此后,许多数学家沿着这条路线前进,竞相缩小 s 的估计值。1937 年,著名苏联数学家维诺格拉朵夫证明了:“对于充分大的奇数,西涅日尔曼常数 s 不超过 3,即对于充分大的奇数,都可以表示为三个奇素数之和”,这个结果通常被称为“三素数定理”。至此,维诺格拉朵夫基本上证明了命题 B。

沿着第二条路线前进时,数学家们引入了“殆素数”的概念。所谓“殆素数”就是素数因子(包括相同的与不同的)的个数不超过某一固定常数的奇整数。例如, $15 = 3 \times 5$ 有 2 个素因子, 19 有 1 个素因子, $27 = 3 \times 3 \times 3$ 有 3 个素因子, $45 = 3 \times 3 \times 5$ 有 3 个素因子,可以说它们都是素因子数不超过 3 的殆素数。这样,用殆素数的概念可以把命题 A 改写成下列较弱的

命题 D: 每一个充分大的偶数,都是素因子的个数不超过 m 与 n 的两个殆素数之和。

这个命题可简记作“ $m+n$ ”,而哥德巴赫猜想就是“ $1+1$ ”。此后,沿着这条主线向“ $1+1$ ”进军的攻坚战就打响了。这里列举一部分主要战果:

1919 年,挪威数学家布伦(V. Brun)证明了“ $9+9$ ”。

1940 年,苏联数学家布赫夕塔布证明了“ $4+4$ ”。

1955 年,中国数学家王元证明了“ $3+4$ ”。

1956 年,苏联数学家维诺格拉朵夫证明了“ $3+3$ ”。

1957 年,王元又证明了“ $2+3$ ”。

1962 年,中国数学家潘承洞和苏联数学家巴尔巴恩各自独立证明了“ $1+5$ ”。

1963 年,王元、潘承洞及巴尔巴恩分别证明了“ $1+4$ ”。

1965 年,维诺格拉朵夫、布赫夕塔布及意大利数学家朋比尼(E. Bombieri)证明了“ $1+3$ ”。

1966 年 5 月,中国数学家陈景润宣布证明了“ $1+2$ ”,他的论文摘要发表在《科学通报》上。因为没有发表详细的证明过程,当时他的这一成果并未得到国际上的承认。前辈数论专家闵嗣鹤仔细审阅了陈景润的长达 200 页的论文原稿,确认证明无误,但建议他改进、简化。文革中,正当别人热衷于造反有理、斗私批修时,陈景润在极其艰难的政治氛围和生活环境中,蛰居 6 平方米的陋室,七易寒暑,写了几麻袋的草稿纸,坚持不懈地继续研究。1973 年,陈景润在《中国科学》上正式全文发表了他的著名论文“大偶数表为一个素数及不超过两个素数的乘积之和”。这一辉煌成就立即在国内外数学界引起了强烈的反响,被认为是“筛法的光辉顶点”。英国数学家哈勃斯丹(H. Halberstam)和德国数学家李希特(H. Richet)合著的数论著作《筛法》当时正在排印,他们见到陈景润的论文后,立即增补了专章,以“陈氏定理”为标题,基本上全文转载了陈景润的论文。

陈景润是福建人,1933 年出生于福州市郊的一个邮政局职员家里,家境不好,勉强读到高中,未毕业即以同等学历考入厦门大学(1949 年)。曾报名参加军干校未获准。厦大学习条件好,同班只 4 名学生,倒有 4 位教授和 1 个助教。1953 年

毕业,去北京当中学教师。1954年,厦门大学校长王亚南将陈景润调回厦门大学数学系资料室当资料员。陈景润是华罗庚的《堆垒素数论》和《数论导引》第一批忠实的读者。陈景润的第一篇论文是关于华林问题,被送往华罗庚处,结果陈景润在1957年再次调到北京,在中国科学院数学所工作。陈景润1981年当选为中国科学院学部委员。陈景润尊敬和感激自己的老师。1980年4月,陈景润参加华罗庚在英国伯明翰举行的宴会,当华罗庚向客人们介绍陈景润说,陈景润说:“华教授是培养我成长的大师”。陈景润对闵嗣鹤的具体指点更是感激不尽,闵教授去世后,陈景润每年都要去闵师母处请安问候。

哥德巴赫猜想在中国的研究凝聚了许多数学家的心血。早在30年代,华罗庚在剑桥大学访问时就对这个问题有所研究并取得了一定的成果。后来他选定这个问题作为数论组讨论班的主题,希望通过对它的研究来学习解析数论的许多重要方法,现在看来,华罗庚当时的选择是极有远见的。

继华罗庚之后中国另一位著名的数论学者是闵嗣鹤(1913~1973)。他1929年入北京师范大学预科,1935年毕业于北京师范大学并到附中任教。1937年,跟杨武之到清华大学当助教,开始从事数论方面的研究工作。1940年,他在华罗庚的指导下,以“相合式解数之渐近公式及应用此理以讨论奇异级数”一文获中国科学社高君韦女士纪念奖金(另一篇获奖的是王宪钟的“线丛群下之微分几何学”)。1945年,他考取“庚款”留学名额,赴英国研习数论,1947年获牛津大学博士学位,随后到美国普林斯顿高级研究所访问。1948年回国在清华大学任教。1952年起一直在北京大学任教授。

王元是华罗庚的得力助手,1930年生于江苏镇江。1952年从浙江大学毕业到数学所工作,曾和华罗庚合作进行过不

少研究工作,可谓是华罗庚在数论方面的嫡传弟子。华罗庚和王元合著的《数论在近似分析中的应用》一书,由德国的斯普林格出版社印行以后,得到各方面的重视。1983年,美国数学会通报发表评述文章,认为这是数论应用的重要著作。评论说:“本书的价值和用处是毫无疑义的,就完备而系统地介绍这一重要而有趣的题材而言,本书大概是唯一可以见到的著作”,“就抽象的纯数论的实际应用而言,这本书本身就是一个光彩夺目的例证”。王元1981年当选为中国科学院学部委员。

潘承洞是我国数论名家。1934年生于苏州,在北京大学就读研究生毕业后,到山东大学任教。他在哥德巴赫猜想研究上有重要贡献。1992年当选为中科院学部委员。

目前,在哥德巴赫猜想的研究上,陈景润的成果($1+2$)仍处于世界领先的地位,距离“堡垒”的核心($1+1$)只剩下最后一道坚固的防线。突破这道防线是如此地艰难,迄今为止,尚无人看出一丝哪怕是极其微弱的预示着胜利的曙光。这个问题的最终解决仍有待于数学家们今后的不懈努力。

第十节 中国数学会 60 年

1911年的辛亥革命,开辟了中国革命的新时代,科学与民主的口号激励着爱国知识分子的心。在新文化的高潮中,一批年轻的数学家着手创建中国的数学教育体系。1912年,国内当时唯一的“国立”北京大学创办了第一个大学的数学系。此后,全国各地纷纷办起数学系。到1934年,全国已有21所大学设有数学系。这些大学数学系陆续培养出一批青年数学工作者,加之国外留学归来的数学家作为中坚力量,一支现代数学的研究队伍已经初具规模。

在这样的背景下,1935年7月25日,代表着全国数百名数学工作者的33名代表在上海交通大学图书馆举行了中国数学会成立大会,大会开了3天,至7月27日闭幕。

在第一天的会议上,胡敦复被选为会议主席。三天的议程为:讨论制定会章;选举学会工作人员;研究开展学术活动;宣读论文。

数学会选举出三大类工作人员:胡敦复等9人为董事,熊庆来等11人为理事,钱宝琮等21人为评议。

会议决定由中国数学会出版两种数学刊物。一种为普及性的,称为《数学杂志》,重点放在介绍数学成就上,用中文发表,由顾澄担任总编辑;一种为学术性的,称为《中国数学会学报》,专门发表创造性论文,用中文或英、法、德、意等国文字发表,旨在促进中外数学交流,苏步青、熊庆来、朱公谨、孙光远、江泽涵、曾昭安、刘俊贤为编委,苏步青任主编,华罗庚为助理编辑。

在中国数学会的成立大会上,钱宝琮、华罗庚、陈建功、范会国等4人宣读了论文。会上还根据熊庆来的提议,决定邀请外国学者来华讲学,加入国际数学会及所属的国际数学教育委员会,设立研究奖金以鼓励青年数学家。

中国数学会的成立,既显示了国内在数学研究方面已经积聚了相当的力量,又标志着中国数学进入了现代科学的领域。

1936年夏天,在北京举行了中国数学会第二次年会,会上宣读了14篇论文。这些论文不但在数量上大大地超过了第一次年会,而且内容丰富,水平也大大提高。当时的中国数学尽管与世界数学主流还有相当大的差距,但应该说已有了相当的根底。抗战前夕,我国数学家在解析数论、函数论、射影微

分几何等方面已有了很好的成果。

1937年抗战爆发后,原定在杭州召开的数学会第三次年会被迫推迟。1940年,因中国数学会的立案被当局撤销,数学会会员旋即在昆明西南联大成立了新中国数学会,以取代原来的中国数学会。会上宣读了20多篇论文,选举了姜立夫为会长。会上还作出决定,继续刊行数学会学报。与此同时,重庆、成都、遵义、城周、嘉定、上海连同昆明共七处先后分别举行了第三次年会。尽管条件艰苦,经过一年努力,在1941年年会上发表了63篇论文,1942年年会上发表了74篇论文。取得这些成绩是很不容易的,点点滴滴都渗透了数学界前辈们的心血。

抗战胜利后,于1948年10月在南京举行中国数学会第四次年会,决定新中国数学会仍恢复原名——中国数学会。

1949年7月,中国政府在北京召开了自然科学工作者代表会议筹备会。会上各地数学工作者几次商议中国数学会的重新组建问题,并且组织了中国数学会临时干事会。在两年的筹备期间,全国各地成立了17个分会,会员总数超过2400人。

1951年8月15日,建国后的中国数学会第一次代表大会在北京大学召开,大会共有代表78人,实际到会63人。会议进行了5天,选举出21位理事和7位候补理事,常务理事有9人:华罗庚、江泽涵、陈建功、曾昭安、吴大任、傅种孙、关肇直、段学复、王寿仁,华罗庚为理事长。

大会召开之时,《中国数学学报》(1952年起改为《数学学报》)和《中国数学杂志》(1953年起改称《数学通报》)已经恢复出版。《数学学报》由华罗庚任总编辑,陈建功、申又枨负责分析学科;段学复、张禾瑞负责代数学科;苏步青、江泽涵负责

几何学科；赵访熊、周培源负责应用数学；关肇直负责数学基础；李俨负责数学史；许宝騄负责统计数学。《中国数学杂志》由华罗庚和傅种孙任总编辑，出版两期后，由傅种孙任主编并组成了 27 人的编委会。

参加这次大会的数学家们总结了过去的数学发展的经验教训，展望了光明的前程，并具体安排了中国数学界当时急需进行的几项工作，如协助科学院进行数学名词的审定统一工作，调查统计中国数学家“五四”以来的论文和著作并汇编成目录，编辑出版大中小学数学教科书等。

大会还作出了一些具有重要历史意义的决议或建议，如号召广大数学工作者深入研究中国数学史，发掘祖国的数学宝库，激发广大青少年爱国热情和学习数学的积极性，发扬祖国数学的优良传统；要求广大会员重视应用数学，提倡分配一部分会员到国防、经济、文化建设等方面去；提议组织数学家、物理学家、电子工程师一起研究电子计算机并培养这方面的专门人才。

中国数学会第一次代表大会开得热烈兴旺，它标志着中国数学的发展进入了一个崭新的阶段。

1960 年 2 月，中国数学会第二次代表大会在上海召开，到会正式代表 128 人，列席 43 人。这次会议主要讨论数学发展方向以及各类学校的教育改革问题。

这次大会要求以祖国建设需要为纲来发展数学，进一步强调理论联系实际，这无疑是正确的，但是也有一些提法如“任务带学科”等不够妥当，特别对基础理论的研究有所忽视，带来一些不利的后果。这次会议的第二个议程是讨论如何根本改革各级各类学校的数学教学问题。北京、上海以及各地一些学校提了一些改革方案，步子都比较大，要求过高，不切实

际,学生无法接受,后来没有实行。不过对于开阔数学教育工作者的视野,还是有一定好处的。

这次代表大会产生了新的理事会,华罗庚继续担任理事长。

1978年11月,在成都召开中国数学会第三次代表大会,标志着经过十年动乱之后,中国数学开始复苏。这次大会有代表472人,收到论文500多篇,在会上报告409篇,其中有7篇在大会报告,其余分成15个小组报告。会议选举了新的理事会,华罗庚三连任理事长,苏步青、江泽涵为副理事长。

中国数学会第四次全国代表大会于1983年10月在武汉召开,这次会议的代表有260人,收到论文350篇,12人在大会上做了综合报告,会议希望提高国内学术会议的质量,扩大与国际数学界的有益交往。在这次大会上,一批前辈数学家退居二线,担任名誉职务。经到会代表以无记名方式投票,选出华罗庚、苏步青、江泽涵、柯召、吴大任为名誉理事长,吴新谋、赵访熊、李国平为名誉理事。第四届理事会共有89位理事,其中32位是新当选的。理事的平均年龄由63岁降为56岁。经理事会推选,吴文俊当选为理事长,王元、谷超豪、胡国定、程民德为副理事长,秘书长由杨乐担任。这样,在这次武汉会议上,圆满地完成了新老交替,实行了新老结合。

1985年,中国数学会成立整整50年了。12月6日,在上海复旦大学大礼堂举行50周年年会。这是一次盛大的聚会。大会由吴文俊理事长主持,苏步青向大会做了报告。报告回顾了学会50年的历程,并展望今后的工作。周培源、周光召、谢希德分别代表中国科协、中国科学院和复旦大学致贺词。日本数学会的代表向大会赠了礼品。最后由陈省身做“50年的世界数学”的报告。

1987年,中国数学会第五届理事会用通讯方式产生,王元当选为理事长。1991年,中国数学会产生了第六届理事会,杨乐任理事长,石钟慈、严士健、张恭庆、胡和生、潘承洞为副理事长,自1992年1月开始工作。1995年,第七届理事会开始工作,由张恭庆任理事长。

第十一节 中国现代数学发展综述

中国现代数学的发展从辛亥革命胜利后至今大约经历了四个时期。

一、兴起时期(1912~1949)

19世纪50年代起,李善兰等人大量翻译引入西方的数学著作,对于近代数学在中国的传播起了积极作用。当时的中国数学落后于世界数学水平200年以上。

辛亥革命前后,大批知识分子怀着“科学救国”的抱负,远涉重洋,赴欧美和日本留学,其中有不少人专攻数学。这批热血青年学成回国后,成了中国现代数学研究和教学的中坚力量,如熊庆来三次赴法,陈建功和苏步青留日,华罗庚、许宝騄先后出访英美从事研究等。他们都没有被国外优越的工作环境和舒适的生活条件所吸引,学成后毅然回归祖国,为中国的现代数学事业奉献上颗颗赤子之心。

辛亥革命后,一批年轻有为的数学家纷纷在全国各地大学创办起数学系。例如,留日归来的冯祖荀率先在北京大学建立了数学系(1912年)。1920年,从美国哈佛大学毕业返国的姜立夫单枪匹马地去天津南开大学创办数学系。熊庆来和段子燮在南京办东南大学(1921年)。在美国康奈尔大学获得博

士学位的胡明复和哥哥胡敦复回上海办大同大学,陈建功和苏步青先后到浙江大学工作,等等。这些大学的数学系培养了大量人才,日后成为我国现代数学的宝贵财富。

1919年和1921年,胡明复和陈建功先后在国外数学杂志上发表论文,无论从时间上或质量上,都标志着中国现代数学的兴起。此后,华罗庚的解析数论、陈建功的函数论、苏步青的微分几何、许宝騄的数理统计等方面工作都赢得了世界声誉。

陈省身于1943年在美国普林斯顿完成的工作,成为整体微分几何基础,他在1946年任中央研究院数学研究所代理所长期间,培养了一大批青年数学家。

当然,这一时期我国的数学研究主要属于经典数学范围,与当时世界数学主流和前沿的抽象代数、泛函分析、拓扑学的研究相比,还是相对落后的。

二、转折时期(1949~1965)

新中国诞生后,党和国家十分重视科学事业,关心人才的培养和使用。不少海外数学家仍陆续归来。1952年,在北京成立了中国科学院数学研究所并陆续建立了许多数学学科的研究室,各大学数学系也广泛开展了科研工作,并先后开始招收研究生。

老一辈的数学家成了学科研究的带头人和辛勤的教育家,他们从无到有开创了我国现代数学许多新的分支和研究方向,培养了大批数学人才,一支生气勃勃的科研、教学队伍逐步形成。这一时期,在现代数学的一些分支不同程度地取得了一些显著的成果,有些达到了国际水平,特别值得一提的是形成了中国数学的四大流派:以陈建功、熊庆来为代表的函数

论流派,以华罗庚、柯召为代表的数论流派,以苏步青、严志达为代表的微分几何流派和以江泽涵、吴文俊为代表的拓扑学流派。

1956年评定国家自然科学奖时,华罗庚的“典型域上的多元复变函数论”、吴文俊的“示性类及示嵌类的研究”均获一等奖,苏步青的“K展空间和一般度量空间”获二等奖。

到1966年,我国数学水平经过17年的努力,正在接近当时的国际水平。出版或发表了数量较多、质量较高的论著,某些分支学科已经作出了相当出色的成就。

三、低潮时期(1966~1976)

十年动乱是中国数学发展的低潮时期,不少数学研究机构被取消,研究人员流散,大学的数学系也是一片涣散,数学研究与其他学科一样,几乎处于停顿状态。这使我国数学和国际水平本已缩小的差距又拉大了。

但是在这十年内,仍有少数人,不管风吹浪打,坚持数学研究,取得了世界一流水平的成就。

陈景润在哥德巴赫猜想研究上取得了世界领先的结果,一位英国数学家致函陈景润,信中写道:“您,推动了群山!”在古典的函数值分布论方面,杨乐和张广厚取得了一系列具有国际水平的成果;侯振挺在《齐次可列马尔可夫过程》一书中提出的“非保守Q过程唯一性准则”,被国际上誉为“侯氏定理”,荣获1978年度戴维逊奖;冯康从事的有限元方法研究在国际上居领先地位;陆家羲彻底解决了组合数学中的“寇克曼序列”和“斯坦纳系列”两大世界著名难题。

在应用数学方面,以华罗庚为首的数学工作者在全国积极推广“统筹法”和“优选法”,以苏步青为首的数学工作者在

上海江南造船厂结合船体放样,开展了曲线奇点和拐点的理论及计算几何的研究都取得显著成绩。此外,关肇直、秦元勋、周毓麟、李德元等在国防建设方面作出了重大贡献。

四、发展时期(1977~)

拨乱反正后,迎来了科学的春天,数学百花园中出现了百花争艳、万紫千红的景象。1977年制定了新的数学发展规划,恢复了全国数学会和各地数学分会,加强了基础理论和应用数学的研究工作。《中国科学》、《数学学报》、《应用数学学报》及各大学的学报每年发表大量的优秀数学论文。中国学者在国外发表数学论文约每年300篇(1990年统计数字)。

1980年以前,中国数学家在国外出版的专著只有6本,但到1990年统计,在国外已出版专著44本,另有10余本在印刷中,若将约稿计算在内,则总数将近100本。国际上最负盛名的斯普林格出版社出版了36名数学家的选集,其中有三名华人:陈省身、华罗庚、许宝騄。这家出版社出版的数学丛书已收有三位中国青年数学家的著作:肖刚(华东师大,第1137号),时俭益(华东师大,1179号),王小路(北京大学,1257号)。

我国在1956、1982、1987、1989年共四次颁发国家自然科学奖。各个自然科学学科共有394项成果获奖,其中数学有39项。近年来,还出现了不少以数学家名字命名的数学奖,如“许宝騄统计数学奖”(1984年)、“陈省身数学奖”(1985年)、“华罗庚金杯奖”(1986年)、“钟家庆纪念基金”(1987年)、“苏步青数学教育奖”(1991年)等。这些数学奖的设立,进一步推动了我国现代数学的蓬勃发展。

到了1986年,中国在国际数学联合会(IMU)的代表权

问题终获解决。国际数学联合会第十届会员国代表会议,于1986年7月31日至8月1日在美国加利福尼亚州的奥克兰举行。在这次会议上,一致通过了中国数学会提出的方案,即中国为第一类会员国,共5票投票权,其中有中国数学会3票和位于中国台北的数学会2票、中国数学会理事长吴文俊和秘书长杨乐以观察员身份参加会议。此后,中国数学界与IMU的交往增加,1990年我国派出70人的队伍参加了在日本京都举行的国际数学家大会。

关于应邀在国际数学家大会上做报告,我国曾经有华罗庚、陈景润、冯康接到过邀请,但因当时代表权未获解决没有出席。1986年在伯克利的会议上,吴文俊应邀作45分学术报告:“中国数学史的新研究”。1990年京都会议上,我国旅美的数学家田刚(原北大)、林芳华(原浙大)各做了45分报告。

中国派往国际数学教育委员会(ICMI)的国家代表先后是吉林大学伍卓群、山东大学潘承洞和复旦大学李大潜。1980年华罗庚等5人参加了第四届国际数学教育大会(ICME-4),并且华罗庚作了大会报告。此后1988年的ICME-6和1992年的ICME-7都有我国代表参加。1994年,华东师大张奠宙应邀担任国际数学教育委员会第8届执行委员会(1995~1998年)的8名委员之一。1996年8月的ICME-8上,张奠宙为国际程序委员。唐瑞芬在大会圆桌讨论会上发言。顾冷沅、王长沛、裘仲沪作45分钟报告。叶其孝任数学应用和建模小组的召集人,另外,1991年和1994年分别在北京师大和华东师大成功地举办了两次国际数学教育大会的地区性会议。这些都标志着中国的数学教育开始走向世界。

在陈省身教授的倡导下,1988年和1991年在天津南开大学召开了两次“21世纪中国数学展望学术讨论会”。会议提

出了“数学科学研究率先赶上世界先进水平”的口号。陈省身说：“要有信心，千万把自卑的心理放弃。要相信中国会产生许多国际第一流的数学家，也没有理由说中国不能产生牛顿、高斯级的数学家。中国应该能够有自己的数学研究课题，平等独立地开展与国际数学界的交流。”我们坚信，“21 世纪数学大国”的目标一定会成为现实！

面对未来世纪，中国数学界正在实行新的赶超世界先进水平的计划。

参 考 文 献

- [1] (美)克莱因。古今数学思想(中译本)。上海科学技术出版社,1985
- [2] (美)伊夫斯。数学史概论(欧阳绛译)。山西经济出版社,1993
- [3] 梁宗巨。世界数学史简编。辽宁人民出版社,1980
- [4] 李 迪。中国数学史简编。辽宁人民出版社,1984
- [5] 中外数学简史编写组。外国数学简史、中国数学简史。山东教育出版社,1987
- [6] 梁宗巨。数学历史典故。辽宁教育出版社,1992
- [7] 王 元。华罗庚。开明出版社,1994
- [8] 袁小明等。数学思想发展简史。高等教育出版社,1992
- [9] 张奠宙等。20 世纪数学史话。知识出版社,1983. 11
- [10] 解恩泽等。世界数学家思想方法。山东教育出版社,1994. 4
- [11] 朱学志等。数学的历史、思想和方法。哈尔滨出版社,1990
- [12] 中国科学院自然科学史研究所数学史组。数学史译文集。上海科学技术出版社,1981 和 1985
- [13] 张奠宙。中国现代数学史略。广西教育出版社,1993
- [14] 孙世雄。科学方法论的理论和历史。科学出版社,1989
- [15] 沈小峰。自然科学概论。河南科学技术出版社,1986

- [16] 中国大百科全书(数学卷),1988
- [17] 数学百科辞典。科学出版社,1984
- [18] 世界著名数学家传记。科学出版社,1996
- [19] 中国古代科学家传记。科学出版社,1996
- [20] 中国现代科学家传记。科学出版社,1996
- [21] 任南衡、张友余。中国数学会史料。江苏教育出版社,
1995
- [22] 中国数学会 60 年。湖南教育出版社,1995

编写后记

1995 年春,我根据上海市教育委员会制定培训在职教师的计划,开始主编《数学史选讲》。参加编写的人员有严扶平(第一章),许承厚(第二、五章),黄建弘(第三章)和郁克敏(第四章),毛宏德同志负责组织联系工作。

我从一开始,就希望把这本书写成史话的体裁,以人物事件为主,描述数学历史发展的线索,不去追求编年史的那种求多求全的风格。数学内容尽量浅显易懂,以免使读者难解其意,发生困难。我和毛宏德同志多次磋商研究,编写组的同志也同意了我的意见。因而拟出现今的这份目录。此后大家动手写了一些样稿,我只匆匆看了一遍。1995 年 7 月,我到美国纽约州立大学访问七个月,一切担子都交付宏德同志负责。在他组织之下,协调了各章的编写进度,更主要地,统一了写作的基本风格。

待我 1996 年初回到上海,各位编者已有了完整的稿子,宏德同志业已做了一些文字的修改,并写了前言。三月间,我花了一些时间统稿,有删节,也有增加,就成了现在的样子。其中第一章的内容,因和中小学数学内容关系十分密切,有较多的篇幅涉及数学内容。其余各章,大都以人物和事件的叙述为主。这样的安排,是否适应数学教师的培训,还是一个未知数。希望在试用期间,能得到各方意见,以求能真正合于实际需要。

张奠宙 1996. 4. 于华东师范大学